Раскрой секреты случайности

Сборник задач по предмету
"Вероятность и статистика"

Оглавление

Представление данных. Описательная статистика.

Представление данных включает в себя различные методы визуализации и организации информации, чтобы сделать её более понятной и доступной для анализа.

Вот некоторые распространенные способы представления данных:

1. Таблицы
2. Графики
   - Столбчатые диаграммы
   - Линейные графики
   - Круговые диаграммы

Описательная статистика включает в себя методы, которые помогают суммировать и описывать основные характеристики данных. Вот основные меры описательной статистики:

- Среднее арифметическое: Сумма всех значений, деленная на количество значений.
- Медиана: Среднее значение, которое делит набор данных пополам (50% значений меньше и 50% больше).
- Мода: Наиболее часто встречающееся значение в наборе данных.

Задача 1. В классе из 30 учеников проведено анкетирование, в котором спрашивали о количестве книг, прочитанных за последний месяц. Вот собранные данные: 2, 5, 3, 7, 4, 6, 8, 5, 3, 4, 6, 2, 1, 0, 5, 3, 6, 8, 4, 2, 5, 7, 3, 6, 2, 4, 5, 3, 7, 6.
Постройте гистограмму для представления этих данных.

Задача 2. Найдите среднее количество прочитанных книг и медиану по данным *задачи 1*.

Задача 3. Компания проводила опрос среди своих сотрудников о количестве часов, которые они работают в неделю. Результаты опроса (в часах) следующие: 40, 42, 38, 45, 50, 37, 40, 41, 44, 39.
Найдите среднее количество рабочих часов в неделю, определите минимальное и максимальное значение.

Задача 4. Постройте ящичковую диаграмму по данным *задачи 3.*

Задача 5. Две группы студентов (Группа A и Группа B) сдали экзамен по математике. Результаты (баллы) следующие:
- Группа A: 76, 82, 91, 85, 78
- Группа B: 88, 92, 85, 90, 87

Найдите средние баллы для обеих групп и найдите медианы для обеих групп.

Задача 6. В магазине за неделю было продано следующее количество товаров:
15, 20, 22, 18, 25, 17, 30, 22, 19. Постройте столбчатую диаграмму для представления данных о продажах.

Задача 7. В исследовании о потреблении кофе в день были получены следующие данные (в чашках): 1, 2, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 0, 2.
Рассчитайте среднее значение потребления кофе. Найдите моду и медиану.

Случайная изменчивость. Средние числового набора.

Случайная изменчивость — это неустойчивость величины, связанная с действием случайных факторов или причин, часть из которых может быть неизвестна.

Медиана — это среднее значение в отсортированном ряде данных. Если количество значений нечетное, медиана — это серединное значение;
если четное, медиана — это значение равное полусумме двух серединных значений

Среднее арифметическое вычисляется путем сложения всех значений в ряду и деления суммы на количество значений.,

$$\boxed{x_{cp} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}}$$

где x_i - значения ряда,

n– количество элементов ряда.

Размах — это разница между наибольшим и наименьшим значениями в ряду данных.

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}}$$

Задача 1. Измерили массу 10 шоколадных батончиков и записали их массу:
28 г, 31 г, 33 г, 30 г, 35 г, 29 г, 32 г, 34 г, 36 г, 31 г
а) Расположите полученные значения по возрастанию.
б) Найдите среднее значение массы и размах полученного набора.

Задание 2. Рассчитайте среднее арифметическое, медиану, наибольшее и наименьшее значения и размах следующих рядов:
а) 2; 9; -3; 6; 1; -5; 4; -1; 8; 3;
б) -15; 31; 12; 26; -7; -22; 5; 29;
в) -1,2; -2,7; -3,1; 0,8; -2,7; -3,5; -0,9;

Задача 3. Артем выполнил 12 измерений диаметра цветка. Как изменятся медиана этого набора данных, если:
а) наименьшее число набора уменьшить в 3 раза;
б) наибольшее число ряда увеличить в 6 раз?

Задача 4. В классе 25 человек. Одноклассники делились количеством прочитанных книг за лето. Среднее арифметическое полученных данных было равно 4,8. Найдите среднее арифметическое прочитанных книг всеми одноклассниками за лето, если бы каждый прочитал:
а) в 5 раз больше книг; б) в 3 раза меньше книг.

Задача 5. Участник конкурса получил от жюри следующие оценки по 10-ти бальной шкале: 5, 7, 6, 8, 7. Какую оценку он должен получить от шестого члена жюри, чтобы средний бал равнялся 7?

Задача 6. В магазине продаются шоколадные конфеты, расфасованные в коробки по 10 штук. Известно, что масса одной конфеты может колебаться от 8 до 12 граммов. Каков максимальный размах (разница между наибольшей и наименьшей массой) для массы целой коробки конфет?

Задача 7. В магазине продаются 5 видов пирожных:
• Шоколадные: 100 штук
• Ванильные: 150 штук
• Клубничные: 80 штук
• Малиновые: 70 штук
• Лимонные: 50 штук
Какое пирожное является "медианным" по популярности?

Задача 8. В магазине "Конфетка" продаются три вида конфет: шоколадные, карамельные и фруктовые. В понедельник было продано 15 шоколадных, 20 карамельных и 10 фруктовых конфет. Во вторник - 20 шоколадных, 15 карамельных и 15 фруктовых конфет.
а) Найдите среднее арифметическое количество проданных конфет каждого вида за два дня.
б) Найдите медиану количества проданных конфет каждого вида за два дня.
в) Какой вид конфет был наиболее популярен в среднем за два дня?

Задача 9. В школе проводят конкурс на самое оригинальное блюдо из овощей. Пять участников представили свои творения, и жюри оценивало их по 10-балльной шкале. Оценки участников:
• Участник 1: 7 баллов
• Участник 2: 9 баллов
• Участник 3: 5 баллов
• Участник 4: 8 баллов
• Участник 5: 6 баллов

Задача 10. В таблице представлены данные о высоте пяти деревьев в саду:

Дерево	**Высота (см)**
Дуб	150
Клён	120
Берёза	180
Яблоня	100
Груша	130

Каков размах высоты деревьев в саду?

Задача 11. В таблице представлены данные о количестве проданных тортов в кондитерской за 7 дней:

День	Количество тортов
Понедельник	250
Вторник	320
Среда	280
Четверг	380
Пятница	300
Суббота	350
Воскресенье	290

1. Найдите медиану количества проданных тортов за 7 дней.
2. Найдите размах количества проданных тортов за 7 дней.

Задача 12. В таблице представлены данные о количестве проданных билетов на концерт симфонического оркестра за 5 дней:

День	Количество билетов
Понедельник	650
Вторник	800
Среда	950
Четверг	700
Пятница	850

Какое среднее количество билетов на концерт было продано за 5 дней?

Задача 13. В таблице представлена высота (в метрах) 5 самых высоких гор в мире:

Гора	Высота (м)
Эверест	8848
К2	8611
Канченджанга	8586
Лхоцзе	8516
Макалу	8485

Каков размах (разница между наибольшей и наименьшей высотой) гор, представленных в таблице?

Задача 14. Представьте, что в школе проходит конкурс по математике, и ученики должны решить несколько задач. У нас есть 5 учеников, которые получили следующие оценки за свои решения:

- Анна: 78
- Борис: 85
- Вика: 92
- Дмитрий: 67
- Елена: 88

1. Размах оценок: определите размах оценок, чтобы понять, насколько сильно различаются результаты участников.
2. Среднее арифметическое: Найдите среднее арифметическое оценок, чтобы узнать, как в целом справились ученики с заданиями.

3. Кто лучший? Определите, кто из учеников показал лучший результат, и на сколько баллов он опередил остальных.

Задача 15. Представь, что в волшебном королевстве "Матемагия" прошел конкурс на звание "Великого Математика". В конкурсе участвовали 10 магов, каждый из которых использовал свои уникальные заклинания, чтобы заработать баллы. Вот результаты их магических испытаний:
- Маг 1: 56 баллов
- Маг 2: 78 баллов
- Маг 3: 45 баллов
- Маг 4: 89 баллов
- Маг 5: 67 баллов
- Маг 6: 72 балла
- Маг 7: 90 баллов
- Маг 8: 55 баллов
- Маг 9: 80 баллов
- Маг 10: 62 балла

Теперь твоя задача — разгадать математические загадки, которые помогут определить, кто станет Великим Математиком!
а) Определи размах (разницу между максимальным и минимальным баллом) и узнай, насколько сильно различаются способности магов.
б) Найди медиану (среднее значение в упорядоченном наборе) и узнай, какой маг обладает средней силой.
в) Вычисли среднее арифметическое баллов, чтобы понять, насколько хорошо маги справились в целом.

Случайные события. Вероятности и частоты.

Случайным событием называется событие, которые при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Теория вероятностей - это область математики, которая изучает случайное события и общие свойства событий, процессов.

В теории вероятностей эксперименты называются опытами, а возможные результаты - исходами.

Событие, которое не может произойти, называется невозможным событием.

Событие, которое происходит всегда, называется достоверным событием.

В теории вероятности события означают большими буквами латинского алфавита - A, B, C, … Также могут использоваться индексы – A_1, A_2, A_3, …

Вероятность события A - это отношение числа благоприятствующих индексов к общему числу возможных исходов.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

где P(A) - это вероятность события;
m – число исходов благоприятствующих событию A;
n – Общее число исходов.

Исходя из определения, значение вероятности события есть положительное число, заключённое между 0 и 1.

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

Пример задачи. В некотором районе в год рождается 2000 детей. Из них 1100 мальчиков, остальные – девочки. Найдите частоту рождаемости девочек в течение года.

Решение. Запишем событие, для которого будем определять частоту: А – «рождение девочки в течение года». Общее число экспериментов N нам здесь дано, оно равно N=2000. Благоприятных исходов для события А будет N_A=2000–1100=900. Получаем частоту события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{900}{2000} = \frac{9}{20} = 0,45$$

Ответ: 0,45.

Задача 1. Вероятность того, что новый HDD (жесткий диск) в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,05. В некотором городе из 3000 проданных HDD в течение года в гарантийную мастерскую поступили 120 штук. Насколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Задача 2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Задача 3. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Задача 4. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Задача 5. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Задача 6. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.

Задача 7. На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

Задача 8. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Задача 9. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Задача 10. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России?

Классические модели теории вероятностей: монета и игральная кость.

1. Подбрасывание монеты

Исходы: При подбрасывании монеты возможны два исхода:

- Орел (О)
- Решка (Р)

Общее количество исходов: 2 (О, Р)

Вероятности: Если монета честная (симметричная), то вероятность каждого исхода равна: $\frac{1}{2}$.

2. Бросание игральной кости

Исходы: При бросании кости возможны следующие исходы:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

Общее количество исходов: 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Вероятности: Если кость честная, то вероятность каждого исхода равна: 1/6

В случае, если вы бросаете несколько кубиков, общее количество возможных исходов можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\text{Общее количество исходов} = \mathbf{n}^{k}}$$

где n — количество граней на каждом кубике (в случае стандартного кубика n = 6), k — количество бросаемых кубиков.

Задача 1. Какова вероятность того, что при трех подбрасываниях монеты будет ровно две решки?

Задача 2. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей сумма очков будет равна 7?

Задача 3. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях честной монеты хотя бы один раз выпадет орел?

Задача 4. Какова вероятность того, что при бросании одной игральной кости выпадет четное число?

Задача 5. Какова вероятность того, что при одном подбрасывании монеты и одном бросании игральной кости выпадет орел и четное число на кости?

Задача 6. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях монеты выпадет ровно одна решка?

Задача 7. Вы подбрасываете монету и бросаете игральную кость. Какова вероятность того, что на монете выпадет орел, а на кости — четное число?

Задача 8. Вы подбрасываете монету дважды и бросаете игральную кость. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет решка и на кости выпадет число больше 4?

Задача 9. Вы бросаете две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 9 или 10?

Задача 10. Вы подбрасываете монету трижды и бросаете одну игральную кость. Какова вероятность того, что на монете будет ровно два орла и на кости выпадет число больше 3?

Задача 11. Вы подбрасываете монету и бросаете игральную кость. Если на монете выпал орел, какова вероятность того, что на кости выпадет четное число?

Отклонения

Отклонение числа от среднего арифметического — разность между этим числом и средним. арифметическим набора.

Основное свойство отклонений. Сумма отклонений от среднего арифметического равна нулю.

Если число больше среднего арифметического, то отклонение будет положительным. Если число меньше среднего арифметического, то отклонение будет отрицательным.

Значение отклонения равно 0, когда среднее арифметическое совпадает с числом.

Модуль отклонения — абсолютное отклонение.

Задание 1. Найдите отклонения числового набора 5; 7; 6; 9; 4.

Задание 2. Дан числовой набор. Найдите в этом наборе два числа, которые имеют одинаковое абсолютное отклонение от среднего арифметического: 5, 2, 8, 1, 9, 3.

Задание 3. В магазине "Сладкий мир" продают конфеты в коробках по 10 штук. Известно, что средний вес одной конфеты составляет 8 грамм. Однако, вес каждой конфеты может немного отличаться от среднего значения. В одной коробке конфет

оказалось 5 конфет весом 7 грамм, 3 конфеты - 9 грамм, 1 конфета - 10 грамм и 1 конфета - 6 грамм.
а) Найдите отклонение веса каждой конфеты от среднего значения (8 грамм).
б) Какое отклонение (положительное или отрицательное) встречается чаще?
в) Какой вывод можно сделать о весе конфет в этой коробке?

Задание 4. В школе проводят олимпиаду по математике. Средний балл участников за прошлые годы - 75 баллов. В этом году 10 участников получили следующие баллы: 80, 70, 65, 78, 82, 75, 68, 85, 72, 77.
а) Найдите отклонение каждого участника от среднего балла (75 баллов).
б) Сколько участников получили баллы выше среднего?
в) Какой вывод можно сделать о результатах олимпиады в этом году по сравнению с прошлыми годами?

Задание 5. Представьте, что вы работаете в компании, которая производит шоколадные батончики. Средний вес батончика - 50 грамм. На производстве случайно отобрали 10 батончиков для проверки. Их вес составил: 48 г, 51 г, 53 г, 49 г, 52 г, 50 г, 47 г, 54 г, 51 г, 49 г
а) Найдите отклонение веса каждого батончика от среднего значения (50 грамм).
б) Сколько батончиков имеют вес выше среднего?
в) Какой вывод можно сделать о весе батончиков в этой партии по сравнению с заявленным средним весом?
г) Какие меры можно предпринять для того, чтобы отклонение от среднего веса батончиков было меньше?

Задание 6. Вы – менеджер по качеству на фабрике по производству игрушек. Ваша компания производит плюшевых мишек. Средний рост мишки должен составлять 30 сантиметров. На складе случайно выбрали 10 плюшевых мишек для проверки качества. Их рост (в сантиметрах) составил: 28, 31, 33, 29, 32, 30, 27, 34, 31, 29.
а) Найдите отклонение роста каждого мишки от среднего значения (30 сантиметров).
б) Сколько мишек имеют рост выше среднего?
в) Какой вывод можно сделать о росте мишек в этой партии по сравнению с заявленным средним ростом?

Задание 7. В школе проводили олимпиаду по истории. Средний балл участников за последние годы - 82 балла. В этом году 10 участников показали следующие результаты: 88, 75, 78, 85, 82, 72, 90, 77, 80, 84.
а) Найдите отклонение каждого участника от среднего балла (82 балла).
б) Сколько участников получили баллы выше среднего?
в) Какой вывод можно сделать о результатах олимпиады в этом году по сравнению с прошлыми годами?
г) Предложите несколько причин, по которым отклонения от среднего балла у участников могли быть разными.

Задание 8. В спортивной школе проводят соревнования по бегу на 400 метров. Среднее время, которое показывают спортсмены на этой дистанции за последние годы, составляет 55 секунд. В этом году 10 спортсменов показали следующие результаты:53, 57, 54, 56, 58, 55, 52, 59, 56, 54

а) Найдите отклонение времени каждого спортсмена от среднего результата (55 секунд).

б) Сколько спортсменов показали время лучше среднего?

в) Какой вывод можно сделать о результатах соревнований в этом году по сравнению с прошлыми годами?

г) Предложите несколько причин, по которым отклонения от среднего времени у спортсменов могли быть разными.

Задание 9. В магазине "Сладкоежка" продают конфеты разных вкусов. В коробке 100 конфет, среди которых 20 - шоколадные, 30 - карамельные, 35 - фруктовые, 15 - с орехами.

1. Какова вероятность того, что случайно выбранная конфета будет шоколадной?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранная конфета не будет фруктовой?
3. Какова вероятность того, что из 5 случайно выбранных конфет, 2 будут карамельными, 1 - шоколадной, 1 - фруктовой и 1 - с орехами?
4. Определите среднее значение и стандартное отклонение для количества карамельных конфет в выборке из 5 случайно выбранных конфет.

Задание 10. В школе проводят олимпиаду по математике. Результаты участников представлены в таблице:

Ученик	**Балл**
Иван	75
Петр	68
Мария	82
Ольга	78
Андрей	70

1. Найдите средний балл участников олимпиады.
2. Найдите стандартное отклонение баллов.
3. Какой результат можно считать "выбивающимся из общего ряда" (т.е. отклоняющимся более чем на 1 стандартное отклонение от среднего)?

Задание 11. В магазине "Спортландия" продают теннисные ракетки разных моделей. В магазине 50 ракеток, среди которых 15 - для начинающих, 20 - для любителей, 10 - для профессионалов и 5 - для детей.

1. Какова вероятность того, что случайно выбранная ракетка будет для любителей?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранная ракетка не будет для профессионалов?
3. Какова вероятность того, что из 3 случайно выбранных ракеток, 1 будет для начинающих, 1 - для любителей и 1 - для детей?
4. Определите среднее значение и стандартное отклонение для количества ракеток для профессионалов в выборке из 5 случайно выбранных ракеток.

Задание 12. В магазине "Книжный мир" продают книги разных жанров. В магазине 150 книг, среди которых 40 - детективы, 50 - фантастика, 30 - классика, 20 - приключения и 10 - детские книги.
1. Какова вероятность того, что случайно выбранная книга будет детективом?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранная книга не будет фантастикой?
3. Какова вероятность того, что из 4 случайно выбранных книг, 1 будет детективом, 1 - фантастикой, 1 - классикой и 1 - приключением?
4. Определите среднее значение и стандартное отклонение для количества книг по классике в выборке из 6 случайно выбранных книг.

Задание 13. В магазине "Игрушки для всех" продают конструкторы разных размеров. В магазине 60 конструкторов, среди которых 18 - маленькие, 25 - средние, 12 - большие и 5 - очень больших.
1. Какова вероятность того, что случайно выбранный конструктор будет среднего размера?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранный конструктор будет не маленьким?
3. Какова вероятность того, что из 4 случайно выбранных конструкторов, 2 будут средними, 1 - маленьким и 1 - большим?
4. Определите среднее значение и стандартное отклонение для количества больших конструкторов в выборке из 3 случайно выбранных конструкторов.

Задание 14. В магазине "Музыкальные инструменты" продают скрипки разных размеров. В магазине 40 скрипок, среди которых 10 - 4/4 размера, 15 - 3/4 размера, 8 - 1/2 размера и 7 - 1/4 размера.
1. Какова вероятность того, что случайно выбранная скрипка будет 3/4 размера?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранная скрипка не будет 1/4 размера?
3. Какова вероятность того, что из 3 случайно выбранных скрипок, 1 будет 4/4 размера, 1 - 3/4 размера и 1 - 1/2 размера?
4. Определите среднее значение и стандартное отклонение для количества скрипок 1/2 размера в выборке из 4 случайно выбранных скрипок.

Задание 15. В классе из 40 учеников проводилось тестирование по математике. Средний балл (математическое ожидание) составил 75, а стандартное отклонение — 10.
1. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик набрал балл выше 85?
2. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик набрал балл ниже 65?
Предположим, что распределение баллов близко к нормальному.

Дисперсия числового набора.

Дисперсия набора чисел - среднее арифметическое квадратов отклонений чисел от их среднего арифметического.

Для вычисления дисперсии ряда 8; 6; 0; 10 чисел заполним таблицу.

Значение	Отклонение	Квадрат отклонения
8	8 – 6 = 2	$2^2 = 4$
6	6 – 6 = 0	$0^2 = 0$
0	0 – 6 = -6	$(-6)^2 = 36$
10	10 – 6 = 4	$4^2 = 16$
Среднее арифметическое: 6	Сумма: 0	Дисперсия: $\frac{4+0+36+16}{4} = 14$

Дисперсия характеризует разброс данных.

Высокая дисперсия указывает на большой разброс данных, а низкая — на их близость друг к другу. Рассмотрим примеры:

- 1, 2, 3, 4, 5 — числа находятся в пределах ±2 от среднего значения 3, поэтому дисперсия низкая;
- 13, 25, 976, 90, 120 713 — здесь дисперсия высокая, так как разница между наименьшим и наибольшим числом превышает 120 000.

Есть более рациональный способ нахождения дисперсии. Для этого достаточно вычислить средний квадрат значений числовых данных и квадрат их среднего арифметического.

Формула нахождения дисперсии:

$$\boxed{S^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

где S^2 – дисперсия;

$\overline{x^2}$ – средний квадрат значения чисел ряда;

$\bar{x}^2$ – квадрат среднего арифметического ряда.

В соответствии с формулой можем дать дисперсии ещё одно определение.

Дисперсия набора чисел - разность среднего квадрата значений и квадрата среднего арифметического.

Рассчитаем дисперсию числового ряда, приведённого выше, но уже с использованием формулы. Заполним таблицу.

Значение	Квадрат значения
8	64
6	36
0	0
10	100
Среднее арифметическое: $\bar{x}^2 = \left(\frac{8+6+0+10}{4}\right)^2 = 6^2 = 36$	Среднее арифметическое: $\overline{x^2} = \frac{8^2+6^2+0^2+10^2}{4} = \frac{64+36+0+100}{4} = 50$

Задача 1. Для ряда чисел 5, 6, 8, 10, 7, 2 найдите:

а) среднее арифметическое;

б) отклонение каждого члена ряда от среднего арифметического;

в) сумму квадратов отклонений;

г) дисперсию ряда (округлите до целых).

Задача 2. Вычислите дисперсию ряда чисел:
а) 6, 8, 10, 12, 9;
б) -4, -1, -2, 7, 5, 4.

Задача 3. Составьте какой-либо ряд, состоящий из пяти чисел. Найдите для него:
а) среднее арифметическое;
б) дисперсию;

Задача 4. В таблице приведены средние месячные температуры (в градусах Цельсия), установленные для Москвы и Хабаровска для первого полугодия на основе наблюдений, проводившихся в течение 80 лет.

Месяц	Москва	Хабаровск
Январь	-9,3	-22,3
Февраль	-8,6	-17,2
Март	-3,4	-8,5
Апрель	5,1	3,1
Май	12,4	11,1
Июнь	16,7	17,4

Найдите для каждого ряда данных (если необходимо, округляйте до десятых):
а) среднее арифметическое месячных температур;
б) отклонения температур от среднего арифметического;
в) дисперсию.

Задача 5. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение для ряда чисел (округлите до десятых):
а) -5, -8, 6, 7, 4, 3;
б) 1, 0, 3, 0, 6, 4.

Задача 6. Как изменится дисперсия ряда чисел: x1, x2, x3, x4, x5, x6,
если каждое число увеличить на положительное число а? Проверьте результат на примере ряда 1, 3, 6, 8, -1, -2 и а = 4. Выскажите предположение и проведите доказательство.

Стандартное отклонение числового набора.

Стандартное отклонение — это важная концепция в вероятности и статистике, поскольку оно помогает понять, насколько данные разбросаны относительно среднего значения

Стандартное отклонение числового ряда – квадратный корень из дисперсии этого ряда.

$$\boxed{S=\sqrt{(a-b)}}$$

где S – стандартное отклонение
a – среднее арифметическое квадрата значений чисел ряда
b – квадрат среднего арифметического ряда

Пример: Кто лучше готов к соревнованиям?
Спортсмены проводили подготовку к соревнованиям по стрельбе из лука. Оба спортсмена произвели по 7 серий выстрелов. Каждая серия состояла из 12 выстрелов. По итогам каждой серии подведены результаты попадания в цель.

Получили следующие данные:
Спортсмен 1: 11, 11, 12, 11, 9, 11, 12.
Спортсмен 2: 12, 10, 9, 12, 11, 12, 11.

Найдём среднее арифметическое для каждого спортсмена.

Спортсмен 1: $\frac{11+11+12+11+9+11+12}{7}=\frac{77}{7}=11$.

Спортсмен 2: $\frac{12+10+9+12+11+12+11}{7}=\frac{77}{7}=11$.

Значения одинаковы.

Вычислим дисперсию результатов для каждого спортсмена.

Спортсмен 1:

$$\frac{(11-11)^2+(11-11)^2+(12-11)^2+(11-11)^2+(9-11)^2+(11-11)^2+(12-11)^2}{7}=$$

$$=\frac{0+0+1+0+4+0+1}{7}\approx 0{,}86.$$

Спортсмен 2:

$$\frac{(12-11)^2+(10-11)^2+(9-11)^2+(12-11)^2+(11-11)^2+(12-11)^2+(11-11)^2}{7}=$$

$$=\frac{1+1+4+1+0+1+0}{7}\approx 1{,}14.$$

Обратите внимание на полученные значения.

Разброс данных у первого спортсмена меньше. Это говорит о его лучшей подготовке.

Данный пример демонстрирует, что при равных средних арифметических значениях, именно дисперсия позволила выявить наименьший разброс данных среди результатов. Первый спортсмен лучше готов. Показал более стабильный результат.

Задача 1. Дан набор данных: 5, 7, 3, 9, 11. Найдите стандартное отклонение.

Задача 2. Для выборки: 12, 15, 14, 10, 18 найдите стандартное отклонение.

Задача 3. На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготовить одинаковые детали. Результаты рабочих представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Кого из рабочих предпочтительнее взять на работу?

Задача 4. Для определения точности ружья проводят их испытания, проводят десять выстрелов и сравнивают результаты попадания в цель. Какое из трех ружей стреляет точнее?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	+1,0	+1,0	+2,0	+1,5	+2,0	+2,0	+1,5	+1,5	+0,5	+1,0
Б	+1,0	0	-1,5	+1,5	-0,5	-1,5	+2,0	+1,0	-1,0	+2,0
В	-0,5	-1,0	0	-1,5	-1,0	+1,0	+1,0	+1,5	+1,0	+3,0

Задача 5. На станках изготавливают детали по стандартным размерам. Для определения точности работы станков случайным образом выбирают 10 деталей и производят их измерения. Вычислите дисперсию и среднее арифметическое. Сравните точности двух станков.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	+0,5	+0,3	-0,2	+0,4	-0,5	-0,2	+0,3	+0,6	-0,3	+0,1
II	-0,5	-0,4	0	-0,3	-0,1	+0,2	+0,5	+0,1	+0,3	+0,5

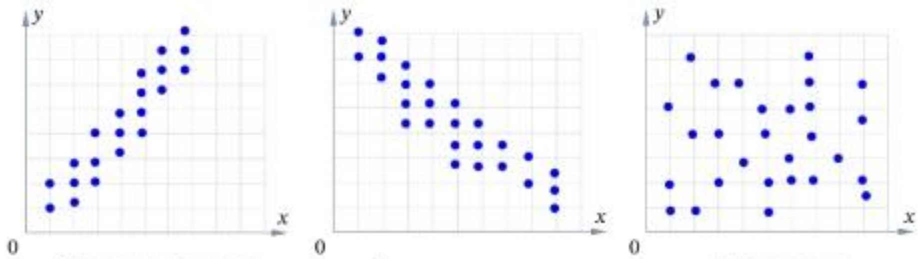
Задача 6. Спортсмены проводили подготовку к соревнованиям по стрельбе из лука. Оба спортсмена произвели по 7 серий выстрелов. Каждая серия состояла из 12 выстрелов. По итогам каждой серии подведены результаты попадания в цель:
Спортсмен 1: 11, 11, 12, 11, 9, 11, 12
Спортсмен 2: 12, 10, 9, 12, 11, 12, 11
Кто лучше готов к соревнованиям?
Составьте таблицу отклонений и вычислите дисперсию.

Диаграммы рассеивания.

Диаграмма рассеивания - способ представления двух совместно наблюдаемых величин точками на координатной плоскости.
Диаграмма рассеивания помогает предположить наличие связи между компонентами, что не является доказательством.

Ось диаграммы рассеивания — прямая, около которой группируются точки облака рассеивания.

Диаграмма рассеивания предназначена для оценки наличия или отсутствии корреляции (взаимосвязи) между двумя изучаемыми величинами, которые обычно описывают:
1.Характеристику качества и влияющий на неё фактор;
2.Две различные характеристики качества;
3.Два фактора, влияющие на одну характеристику качества.



Положительная связь   Отрицательная связь   Нет связи

Задание 1. В таблице представлены данные о росте (в см) и весе (в кг) 10 учеников 9 класса:

Ученик	Рост (см)	Вес (кг)
1	165	55
2	170	60
3	158	50
4	175	65
5	160	52
6	180	70
7	168	58
8	172	62
9	162	54
10	178	68

Постройте диаграмму рассеивания, где ось абсцисс (горизонтальная) будет представлять рост учеников, а ось ординат (вертикальная) - вес.

Задание 2. В спортивной школе 10 детей занимаются бегом на короткие дистанции. Учитель записал данные о росте каждого ребёнка (в см) и его лучшем результате на дистанции 60 метров (в секундах):

Ученик	Рост (см)	Результат (сек)
1	155	8,5
2	160	8,0
3	150	9,0
4	165	7,5
5	158	8,2
6	170	7,0
7	162	8,1
8	152	9,2
9	168	7,2
10	157	8,3

Постройте диаграмму рассеивания, где ось абсцисс (горизонтальная) будет представлять рост учеников, а ось ординат (вертикальная) - их лучший результат на дистанции 60 метров.

Задание 3. Группа из 10 учеников 8 класса решила провести исследование, чтобы понять, есть ли связь между количеством времени, которое они проводят за компьютерными играми, и их успеваемостью по математике.

Ученик	Время за играми (час/неделя)	Оценка по математике
1	10	4
2	5	5
3	15	3
4	2	5
5	8	4
6	20	2
7	3	5
8	12	3
9	7	4
10	1	5

Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между временем, проведенным за компьютерными играми, и оценкой по математике.

Задание 4. В спортивной секции по бегу 8 класса решили провести исследование, чтобы понять, как количество тренировок в неделю влияет на время, затраченное на пробежку 5 км. Они замерили количество тренировок и время, которое каждый из 10 участников затрачивает на пробежку 5 км.

Ученик	Количество тренировок (в неделю)	Время пробежки 5 км (минуты)
1	3	25
2	2	28
3	5	21
4	4	23
5	1	30
6	6	19
7	3	24
8	4	22
9	2	27
10	5	20

1. Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством тренировок в неделю и временем, затраченным на пробежку 5 км.
2. Укажите связь этой зависимости

Задание 5. В 8 классе проводили опрос, чтобы понять, есть ли связь между количеством часов, потраченных на чтение книг, и оценкой по русскому языку. Ученики ответили на два вопроса:

• Сколько часов в неделю вы обычно читаете книги?
• Какая у вас средняя оценка по русскому языку за последний месяц?

Ученик	Время чтения (час/неделя)	Оценка по русскому языку
1	5	4
2	2	3
3	8	5
4	3	4
5	1	2
6	7	5
7	4	4
8	6	5
9	2	3
10	9	5

1.Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством часов, потраченных на чтение книг, и оценкой по русскому языку.
2.Укажите, является ли эта зависимость положительной или отрицательной?

Задание 6. В 8 классе решили провести исследование, чтобы понять, есть ли связь между количеством часов, потраченных на изучение иностранных языков (не только английского), и оценкой по английскому языку. Они опросили одноклассников, попросив их указать:

• Сколько часов в неделю они обычно занимаются изучением иностранных языков (всех языков вместе)?
• Какая у них средняя оценка по английскому языку за последний месяц.

Ученик	Время изучения иностранных языков (час/неделя)	Оценка по английскому языку
1	5	4
2	2	3
3	8	5
4	3	4
5	1	2
6	7	4
7	4	4
8	6	5
9	2	3
10	9	5
11	3	4
12	6	5
13	1	2
14	8	5
15	4	4

1. Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством часов, потраченных на изучение иностранных языков, и оценкой по английскому языку.
2. Укажите связь этой зависимости

Задание 7. В 10 классе решили провести исследование, чтобы понять, есть ли связь между количеством прочитанных книг за год и количеством посещенных театральных спектаклей. Они опросили одноклассников, попросив их указать:

• Сколько книг они прочитали за прошедший учебный год.
• Сколько театральных спектаклей они посетили за тот же период.

Ученик	Количество прочитанных книг	Количество посещенных спектаклей
1	15	5
2	5	2
3	20	8
4	10	3
5	3	1
6	12	4
7	8	3
8	18	7
9	4	1
10	25	10
11	7	2
12	15	6
13	2	0
14	10	4
15	12	5

1.Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством прочитанных книг и количеством посещенных театральных спектаклей.
2. Укажите связь этой зависимости

Задание 8.В 8 классе решили провести исследование, чтобы понять, есть ли связь между количеством времени, которое ученики тратят на просмотр юмористических видео, и уровнем их стресса. Они опросили одноклассников, попросив их указать:
• Сколько часов в день они обычно смотрят юмористические видео.
• Уровень стресса по шкале от 1 до 5 (1 - очень низкий уровень стресса, 5 - очень высокий уровень стресса).

Ученик	Время просмотра юмористических видео (час/день)	Уровень стресса (шкала 1-5)
1	1	3
2	2	2
3	0.5	4
4	3	2
5	1.5	3
6	0.5	4
7	2	2
8	1	3
9	2.5	2
10	0.5	4
11	1.5	3
12	2	2
13	1	3
14	2.5	2
15	1.5	3

1.Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством часов, потраченных на просмотр юмористических видео, и уровнем стресса.
2.Укажите связь этой зависимости

3.Можно ли сделать вывод, что увеличение времени, потраченного на просмотр юмористических видео, всегда приводит к снижению уровня стресса?

Задание 9. В 7 классе решили провести исследование, чтобы понять, есть ли связь между количеством времени, которое ученики тратят на общение в социальных сетях, и уровнем их удовлетворенности жизнью. Они опросили одноклассников, попросив их указать:

• Сколько часов в день они обычно проводят в социальных сетях.

• Уровень удовлетворенности жизнью по шкале от 1 до 5 (1 - очень низкий уровень удовлетворенности, 5 - очень высокий уровень удовлетворенности).

Ученик	Время в соцсетях (час/день)	Уровень удовлетворенности (шкала 1-5)
1	2	4
2	1	5
3	3	3
4	4	2
5	5	1
6	0.5	5
7	2.5	4
8	1.5	3
9	3.5	2
10	4.5	1
11	0.5	4
12	2	3
13	3	2
14	1	4
15	2.5	3

1.Постройте диаграмму рассеивания, которая показывает зависимость между количеством часов, потраченных на общение в социальных сетях, и уровнем удовлетворенности жизнью.

2.Укажите связь этой зависимости

3.Можно ли сделать вывод, что увеличение времени, потраченного на общение в социальных сетях, всегда приводит к снижению уровня удовлетворенности жизнью?

Задание 10. Компания "АвтоМир" собирает данные о продажах автомобилей в течение последнего года. Они хотят понять, как связаны пробег автомобиля (в километрах) и его цена (в тысячах рублей). Ниже представлена таблица с данными о 10 проданных автомобилях:

Автомобиль	Пробег (км)	Цена (тыс. руб.)
A	10 000	800
B	25 000	650
C	40 000	500
D	55 000	400
E	70 000	350
F	85 000	300
G	100 000	250
H	115 000	200
I	130 000	150
J	145 000	100

1. Постройте диаграмму рассеивания, используя данные из таблицы. Ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять пробег автомобиля, а ось ординат (вертикальная) - цену продажи.
2. Какую связь можно наблюдать на диаграмме рассеивания между пробегом автомобиля и его ценой продажи?
3. Представьте, что вы хотите купить автомобиль с пробегом 60 000 км. Можно ли использовать диаграмму рассеивания, чтобы приблизительно оценить его цену? Как?

Задание 11. Компания "Книжный Мир" запускает новую рекламную кампанию для продвижения новой книги. Они хотят понять, как связаны затраты на рекламу (в тысячах рублей) и количество проданных книг. Ниже представлена таблица с данными о 8 рекламных кампаний:

Кампания	Затраты на рекламу (тыс. руб.)	Количество проданных книг
1	10	500
2	15	600
3	20	750
4	25	800
5	30	900
6	35	1000
7	40	1100
8	45	1200

1. Постройте диаграмму рассеивания, используя данные из таблицы. Ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять затраты на рекламу, а ось ординат (вертикальная) - количество проданных книг.
2. Какую связь можно наблюдать на диаграмме рассеивания между затратами на рекламу и количеством проданных книг?
3. Представьте, что компания "Книжный Мир" хочет потратить 32 тысячи рублей на рекламу. Можно ли использовать диаграмму рассеивания, чтобы приблизительно оценить, сколько книг они смогут продать? Как?

Задание 12. Тренер по бегу решил изучить связь между временем, которое бегуны тратят на тренировки (в часах) и их результатами на соревнованиях (в минутах). Он собрал данные о 10 спортсменов:

Бегун	Время тренировок (часы)	Результат на соревнованиях (минуты)
1	10	35
2	12	33
3	15	30
4	18	28
5	20	26
6	22	25
7	25	23
8	28	22
9	30	21
10	32	20

1. Постройте диаграмму рассеивания, используя данные из таблицы. Ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять время тренировок, а ось ординат (вертикальная) - результат на соревнованиях.
2. Какую связь можно наблюдать на диаграмме рассеивания между временем тренировок и результатом на соревнованиях?
3. Представьте, что новый бегун хочет улучшить свой результат на 5 минут. Можно ли использовать диаграмму рассеивания, чтобы приблизительно оценить, сколько часов ему нужно дополнительно тренироваться? Как?

Задание 13. Директор школы хочет понять, какой фактор сильнее влияет на успеваемость учащихся: количество часов, потраченных на домашнюю работу, или количество часов, потраченных на чтение книг в свободное время. Он собрал данные о 10 учениках 9-го класса:

Ученик	Часы на домашнюю работу (в неделю)	Часы на чтение (в неделю)	Средний балл
1	10	5	7
2	12	3	6.5
3	15	7	8
4	18	4	7.5
5	20	10	9
6	22	2	6
7	25	8	8.5
8	28	5	7
9	30	6	8
10	32	9	9.5

1. Постройте две диаграммы рассеивания, используя данные из таблицы. На первой диаграмме ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять количество часов на домашнюю работу, а ось ординат (вертикальная) - средний балл. На второй диаграмме ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять количество часов на чтение, а ось ординат (вертикальная) - средний балл.
2. Какую связь можно наблюдать на каждой диаграмме рассеивания между количеством часов, потраченных на домашнюю работу / чтение, и средним баллом?
3. Можно ли на основе диаграмм сделать вывод, какой фактор сильнее влияет на успеваемость: количество часов, потраченных на домашнюю работу, или количество часов, потраченных на чтение?

Задание 14. Музыкальный продюсер хочет понять, что влияет на популярность музыкантов: вдохновение (количество часов, потраченных на сочинение музыки), или упорство (количество часов, потраченных на репетиции). Он собрал данные о 10 музыкантах:

Музыкант	Часы на сочинение (в неделю)	Часы на репетиции (в неделю)	Количество просмотров клипа (в миллионах)
1	10	5	2
2	12	3	1.5
3	15	7	3
4	18	4	2.5
5	20	10	4
6	22	2	1
7	25	8	3.5
8	28	5	2
9	30	6	3
10	32	9	4.5

1. Постройте две диаграммы рассеивания, используя данные из таблицы. На первой диаграмме ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять количество часов на сочинение, а ось ординат (вертикальная) - количество просмотров клипа. На второй диаграмме ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять количество часов на репетиции, а ось ординат (вертикальная) - количество просмотров клипа.
2. Какую связь можно наблюдать на каждой диаграмме рассеивания между количеством часов, потраченных на сочинение / репетиции, и количеством просмотров клипа?
3. Можно ли на основе диаграмм сделать вывод, что какой фактор более важен для успеха музыканта: вдохновение или упорство?

Задание 15. Платформа онлайн-обучения "Учись онлайн" хочет понять, как связаны количество часов, потраченных студентами на прохождение курса (в часах), и их итоговый балл (в процентах). Они собрали данные о 10 студентах, которые прошли курс по основам программирования:

Студент	Часы обучения	Итоговый балл (%)
1	10	70
2	12	75
3	15	80
4	18	85
5	20	90
6	22	95
7	25	85
8	28	90
9	30	80
10	32	75

1. Постройте диаграмму рассеивания, используя данные из таблицы. Ось абсцисс (горизонтальная) должна представлять количество часов обучения, а ось ординат (вертикальная) - итоговый балл.
2. Какую связь можно наблюдать на диаграмме рассеивания между количеством часов обучения и итоговым баллом?
3. Можно ли утверждать, что чем больше времени студент проводит на курсе, тем выше его итоговый балл?

Множество, подмножество.

Множество - совокупность (произвольный набор) каких-либо объектов.

Объекты множества - это элементы множества.

Принадлежность элемента множеству обозначается значком $\in$.

Пример: Множество: $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Исходя из данного множества $2 \in A$ (2 принадлежит А), $3 \notin A$ (3 не принадлежит А).

Множество, состоящее из конечного количества элементов, называется конечным. Множество, имеющее бесконечное количество элементов, называется бесконечным.

Есть множество, состоящее из одного элемента.

Множество может и не иметь элементов. Множество, не имеющее элементов, называется пустым множеством.

Пример:

A = {2,4,6,8} - конечное множество натуральных четных однозначных чисел;
B ={5} - множество, состоящее из одного элемента;
C = $\emptyset$ - пустое множество;
D = {1,2,3,4, 5...} - бесконечное множество натуральных чисел.

Элементы множества образуют подмножества. Множество У называется подмножеством X, если любой элемент множества У принадлежит множеству X. Математическая запись: Y $\in$ X.

Пример: множество A = {2, 4, 6, 8} является подмножеством D = {1, 2,3, 4, 5...}. Математическая запись: A $\in$ D.

Любое множество является подмножеством самого себя, X $\in$ X.

Пустое множество (C = $\emptyset$) является подмножеством любого множества C $\in$ X.

Множества равны (X = У), если равны их элементы. Любой элемент множества X принадлежит множеству У, а любой элемент множества У принадлежит множеству X.

Пример: {a, b, c, d} = {d, c, b, a}.
(Порядок расстановки элементов в множествах неважен. В числовых множествах принято элементы записывать в порядке возрастания.)

Задача 1. Дано множество X = {я, ю, э, ь, ы, ъ, щ, ш, ч, ц, х, ф, у, т, с, р, п, о, н, м, л, к, й, и, з, ж, ё, е, д, г, в, б, а}. Каким способом задано это множество? Задайте это множество другим способом. Определить, принадлежат ли этому множеству элементы: к, 2, о, м, п, 15, й, D, i, a, з, ж, 150, j, ф, ц.

Задача 2. Задайте следующие множества двумя способами:
а) X - множество делителей числа 36;
б) A - множество чисел, кратных 6 и меньших 30.
В каком отношении находятся данные множества?

Задача 3. Пусть A = {x| x $\in$ Z, -8 < x < 35}
Составьте такое подмножество множества A, в котором каждый элемент:
а) простое число;
б) число, оканчивающееся цифрой 6;
в) число, записанное одинаковыми цифрами.
г) натуральное число;
д) отрицательное число.

Задача 4. Для множества A = {a, b, c, d} запишите все подмножества. Сколько их получилось?

Задача 5. В данных множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Найдите элементы, не обладающие этим свойством, и выпишите общее свойство у оставшихся элементов:
а) {4, 12, 36, 39, 48};
б) {3, 7, 11, 13, 21, 31};
в) {1, 4, 16, 36, 48, 64};
г) {ромб, параллелограмм, пирамида, трапеция};
д) {собака, коза, кошка, индюк, овца}.

Задача 6. Выберете из данных множеств пустые множества.
а) множество корней уравнения x - 3 = 3;
б) множество решений неравенства x2 - 9 ≤ 0;
в) множество корней уравнения |9 - 5x| = -3.

Задача 7. Даны множества A = {b, c, d, 1}, B = {c, d}, C = {d, c}. Выберете верные утверждения:
а) множества A и C не имеют одинаковых элементов;
б) множества B и C равны;
в) множества A и C равны;
г) множества A содержится в множестве B;
д) множество C содержится в множестве A;
е) множество C является подмножеством множества B;
ж) пустое множество ($\emptyset$) является подмножеством множества A;
з) множество A конечно;
и) множество B является бесконечным;
к) множество B является подмножеством пустого множества

Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение.

Операции над множествами — это основные действия, которые позволяют работать с множествами и их элементами. Рассмотрим три основные операции: объединение, пересечение и дополнение.

Объединение двух множеств A и B — это множество, содержащее все элементы, которые есть в A, в B или в обоих множествах.
Запись: A ∪ B

Пусть A = {1, 2, 3} и B = {3, 4, 5}. Тогда:
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5}

Пересечение двух множеств A и B — это множество, содержащее только те элементы, которые есть одновременно в обоих множествах.
Запись: A ∩ B
Пусть A = {1, 2, 3} и B = {3, 4, 5}. Тогда:
A ∩ B = {3}

Дополнение множества A относительно универсального множества U — это множество, содержащее все элементы из U, которые не принадлежат множеству A.
Запись: A' или U \ A
Пусть универсальное множество U = {1, 2, 3, 4, 5} и A = {2, 4}. Тогда дополнение множества A:
A' = U \ A = {1, 3, 5}

Задача 1.
Даны множества:
• A = {1, 2, 3, 4}
• B = {3, 4, 5, 6}
Найдите:
• Объединение A ∪ B
• Пересечение A ∩ B
• Дополнение A' относительно универсального множества U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Задача 2.
Даны множества:
• A = {2, 4, 6, 8}
• B = {1, 3, 5, 7, 9}
Найдите объединение множеств A и B.

Задача 3.
Даны множества:
• C = {1, 2, 3, 4, 5}
• D = {4, 5, 6, 7, 8}
Найдите пересечение множеств C и D.

Задача 4.
Дано множество:
• E = {a, b, c}
Универсальное множество:
• U = {a, b, c, d, e, f}
Найдите дополнение множества E относительно универсального множества U.

Задача 5.
Даны множества:
• $F = \{1, 2, 3, 4\}$
• $G = \{3, 4, 5, 6\}$
• $H = \{5, 6, 7, 8\}$
Найдите: объединение $F \cup G$, пересечение $F \cap G$, дополнение множества G относительно универсального множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Свойства операций над множествами: переместительное, сочетательное, распределительное, включения.

1) переместительные законы пересечения и объединения (коммутативность):
$A \cap B = B \cap A$;
$A \cup B = B \cup A$.

2) сочетательные законы пересечения и объединения (ассоциативность):
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3) распределительные законы (дистрибутивность)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4) законы включения

Включения относительно **пересечения**	Включения относительно **объединения**
$X \cap (Y \cup Z) \subset (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	$(X \cap Y)(X \cap Z) \subset X \cap (Y \cup Z)$

Задание 1. В компании "Техномир" работают 100 сотрудников. Среди них 60 человек владеют навыками программирования (множество A), 40 человек — навыками работы с базами данных (множество B), и 25 человек владеют обоими навыками (множество $A \cap B$). Компания планирует сформировать команду из двух человек для разработки нового проекта. Для этого из всех сотрудников случайным образом выбирают двух человек. Найдите вероятность того, что хотя бы один из выбранных сотрудников владеет навыками программирования. Используйте переместительное свойство объединения множеств ($A \cup B = B \cup A$) для решения задачи.

Задание 2. В университете изучают три предмета: математику (M), физику (F) и информатику (I). Всего в университете 300 студентов. Результаты сессии показали:
• 150 студентов сдали математику (M).
• 120 студентов сдали физику (F).
• 100 студентов сдали информатику (I).
• 80 студентов сдали математику и физику ($M \cap F$).
• 60 студентов сдали математику и информатику ($M \cap I$).
• 50 студентов сдали физику и информатику ($F \cap I$).
• 40 студентов сдали все три предмета ($M \cap F \cap I$).
Из всех студентов случайным образом выбирается один студент.

Используя сочетательное свойство объединения множеств ((A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)), найдите вероятность того, что студент сдал хотя бы один из трех предметов (M ∪ F ∪ I).

<u>Задание 3.</u> В магазине продают шоколад (Ш), конфеты (К) и печенье (П). Опросили 100 покупателей, что они купили:
• Шоколад купили 60 человек.
• Конфеты купили 50 человек.
• Печенье купили 40 человек.
• Шоколад и конфеты купили 20 человек.
• Шоколад и печенье купили 15 человек.
• Конфеты и печенье купили 10 человек.
• Все три вида сладостей купили 5 человек.
Выбираем одного покупателя наугад. Найдите вероятность, что покупатель купил шоколад и (конфеты или печенье).

<u>Задание 4.</u> В группе из 30 студентов 20 сдали зачет по математике (событие M), а 18 сдали зачет по физике (событие F). Известно, что все студенты, сдавшие зачет по физике, также сдали зачет по математике (F ⊂ M). Найдите вероятность того, что случайно выбранный студент сдал зачет по математике.
Задание 5. В группе туристов 100 человек. Они выбирают экскурсии: городская (Г), природная (П) и музейная (М).
• 70 человек выбрали городскую экскурсию (Г).
• 60 человек выбрали природную экскурсию (П).
• 50 человек выбрали музейную экскурсию (М).
• 40 человек выбрали городскую и природную экскурсии (Г ∩ П).
• 30 человек выбрали городскую и музейную экскурсии (Г ∩ М).
• 25 человек выбрали природную и музейную экскурсии (П ∩ М).
• 20 человек выбрали все три экскурсии (Г ∩ П ∩ М).
Один турист выбран случайным образом.
1) Используя сочетательное свойство объединения, найдите вероятность того, что турист выбрал хотя бы одну из экскурсий (Г ∪ П ∪ М).
2) Используя распределительное свойство пересечения относительно объединения, найдите вероятность того, что турист выбрал городскую экскурсию и (природную или музейную экскурсию) (Г ∩ (П ∪ М)).

<u>Задание 6.</u> В школе 200 учеников. Они изучают английский (A), французский (F) и немецкий (N) языки.
• 120 учеников изучают английский (A).
• 80 учеников изучают французский (F).
• 60 учеников изучают немецкий (N).
• 50 учеников изучают английский и французский (A ∩ F).
• 40 учеников изучают английский и немецкий (A ∩ N).
• 30 учеников изучают французский и немецкий (F ∩ N).
• 20 учеников изучают все три языка (A ∩ F ∩ N).

Выбирается один ученик случайным образом.

1) Используя сочетательное свойство объединения, найдите вероятность того, что ученик изучает хотя бы один из трёх языков ($A \cup F \cup N$).
2) Используя переместительное свойство объединения, покажите, что вероятность того, что ученик изучает английский или французский ($A \cup F$) равна вероятности того, что ученик изучает французский или английский ($F \cup A$). Рассчитайте эту вероятность.

<u>Задание 7.</u> Рассмотрим два множества:

• Множество A = {1, 2, 3, 4, 5}
• Множество B = {4, 5, 6, 7, 8}

1) Найдите объединение множеств A и B.
2) Найдите пересечение множеств A и B.

<u>Задание 8.</u> Пират Джек Воробей закопал свой клад на острове, используя систему подсказок с цветными флажками. На острове есть три места, обозначенные как A, B и C. На каждом месте может быть воткнут флажок одного из трех цветов: красный (К), синий (С) и зеленый (З).

Джек оставил следующую записку:

• Клад закопан там, где есть хотя бы один красный флажок.
• Клад не закопан там, где есть и синий, и зеленый флажки одновременно.

Известно, что флажки расставлены следующим образом:

• Место A: Красный и Синий флажки
• Место B: Красный, Синий и Зеленый флажки
• Место C: Только Зеленый флажок

В каком месте закопан клад? (Обоснуйте свой ответ, используя понятия объединения и пересечения множеств).

<u>Задание 9.</u> Метеорологическая служба прогнозирует погоду на выходные в городе. Они выделяют три погодных условия: солнечно (С), облачно (О) и дождь (Д). По историческим данным известны вероятности этих условий на выходные:

• P(С) = 0.4 (вероятность солнечной погоды)
• P(О) = 0.3 (вероятность облачной погоды)
• P(Д) = 0.3 (вероятность дождя)

Посещаемость городского парка зависит от погоды. Статистика показывает:

• Если солнечно, то парк посещают 80% населения (событие A).
• Если облачно, то парк посещают 50% населения (событие A).
• Если дождь, то парк посещают только 20% населения (событие A).

<u>Задание 10.</u> Футбольный клуб выбирает цвета для новой формы. Они рассматривают три цвета: красный (К), синий (С) и белый (Б). У них есть три варианта дизайна:

Вариант 1: Красная футболка, синие шорты, белые носки (К, С, Б)
Вариант 2: Синяя футболка, белые шорты, красные носки (С, Б, К)
Вариант 3: Белая футболка, красные шорты, синие носки (Б, К, С)

Каждый цвет выбирается с равной вероятностью (1/3). Выбор цвета для футболки, шорт и носков происходит независимо. Сколько всего возможных комбинаций цветов существует? Какова вероятность того, что будет выбран вариант 1 (К, С, Б)? Какова вероятность того, что хотя бы один элемент формы (футболка, шорты или носки) будет синего цвета?

Задание 11. Кофейня предлагает три вида кофе: эспрессо (E), латте (L) и капучино (C). В течение дня 100 посетителей сделали заказы. Результаты следующие:
• 40 человек заказали эспрессо.
• 50 человек заказали латте.
• 30 человек заказали капучино.
• 15 человек заказали как эспрессо, так и латте.
• 10 человек заказали как эспрессо, так и капучино.
• 12 человек заказали как латте, так и капучино.
• 5 человек заказали все три вида кофе.

1) Сколько человек заказали хотя бы один вид кофе?
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный посетитель заказал латте или капучино?

Задание 12. В крупной компании произошла утечка конфиденциальных данных. Компания использует три системы безопасности: антивирус (A), брандмауэр (B) и систему обнаружения вторжений (C). Результаты анализа логов показали следующее (вероятности выражены в долях единицы):
• Вероятность срабатывания антивируса при атаке: $P(A) = 0.8$
• Вероятность срабатывания брандмауэра при атаке: $P(B) = 0.7$
• Вероятность срабатывания системы обнаружения вторжений при атаке: $P(C) = 0.6$
Кроме того, известно:
• Вероятность одновременного срабатывания антивируса и брандмауэра: $P(A \cap B) = 0.6$
• Вероятность одновременного срабатывания антивируса и системы обнаружения вторжений: $P(A \cap C) = 0.5$
• Вероятность одновременного срабатывания брандмауэра и системы обнаружения вторжений: $P(B \cap C) = 0.4$
• Вероятность одновременного срабатывания всех трех систем: $P(A \cap B \cap C) = 0.4$

1. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из систем безопасности сработала при атаке.
2. Вычислите вероятность того, что сработала только система обнаружения вторжений.
3. Предположим, что сработала только система обнаружения вторжений. Насколько вероятна атака в этом случае?

Задание 13. В фруктовой лавке есть яблоки (Я) и груши (Г).
• 70% покупателей выбирают яблоки ($P(Я) = 0.7$)
• 60% покупателей выбирают груши ($P(Г) = 0.6$)
Обратите внимание: некоторые покупатели могут купить и яблоки, и груши.

1. Верно ли утверждение: вероятность купить яблоки и затем груши равна

вероятности купить груши и затем яблоки?

2. Если бы мы знали, что 40% покупателей покупают и яблоки, и груши ($P(Я \cap Г) = 0.4$), как бы мы вычислили вероятность купить хотя бы яблоки или груши?

Задание 14. В школе есть кружки: математики (М), живописи (Ж) и пения (П). Всего 100 учеников.
• 40 учеников посещают кружок математики.
• 30 учеников посещают кружок живописи.
• 20 учеников посещают кружок пения.
• 10 учеников посещают и математику, и живопись.
• Никто не посещает одновременно все три кружка.
• 5 учеников посещают и математику, и пение.
• 8 учеников посещают и живопись, и пение.
Сколько учеников посещают хотя бы один кружок?

Задание 15. В классе из 30 учеников проводился опрос о предпочтениях в спорте. Каждый ученик мог выбрать один или несколько видов спорта из предложенных: футбол, баскетбол и плавание.
Из 30 учеников:

- 12 человек любят футбол (Множество A).
- 10 человек любят баскетбол (Множество B).
- 8 человек любят плавание (Множество C).
- 5 человек любят и футбол, и баскетбол (Множество $A \cap B$).
- 3 человека любят и баскетбол, и плавание (Множество $B \cap C$).
- 2 человека любят и футбол, и плавание (Множество $A \cap C$).
- 1 человек любит все три вида спорта (Множество $A \cap B \cap C$).

Найдите, сколько учеников любят хотя бы один из видов спорта. На сколько человек больше среди учеников тех, кто любит только футбол, чем тех, кто любит только баскетбол? Сколько учеников не любят ни один из предложенных видов спорта?

Графическое представление множеств.

Круги Эйлера - это графический способ представления множеств и операций

Пересечение множеств A, B и C имеет вид:

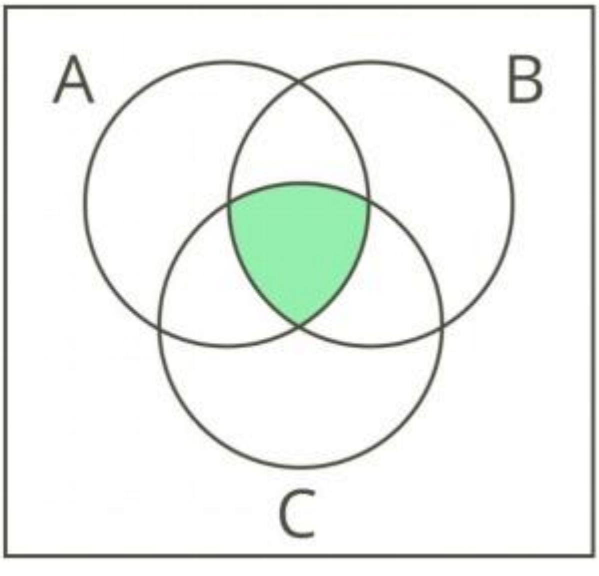


Рис. 1. Пересечение множеств
Зелёным цветом обозначены общие элементы данных множеств.

Объединение множеств А, В и С:

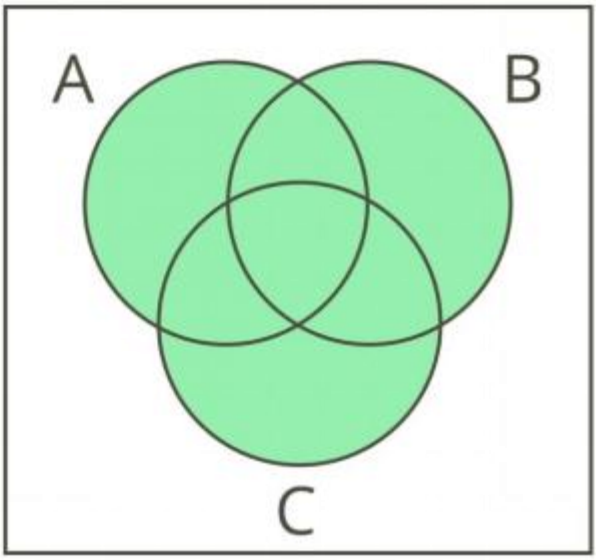


Рис. 2. Объединение множеств
Элементы трёх множеств выделены зелёным цветом при операции объединения.

На следующем рисунке - наглядное изображение операции разность A\B (А без В):

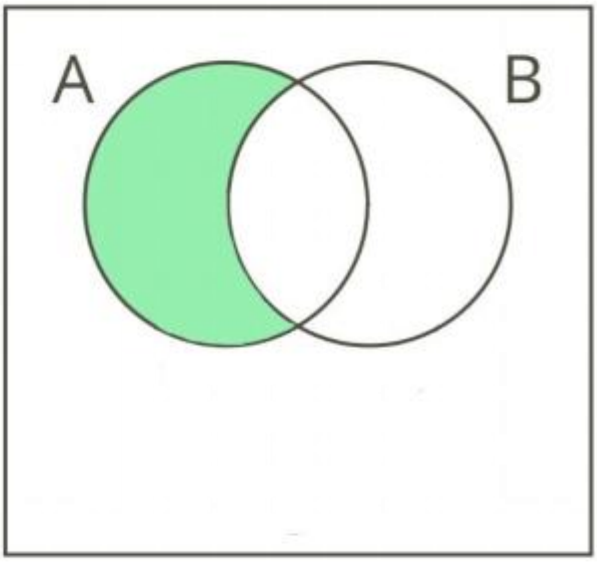


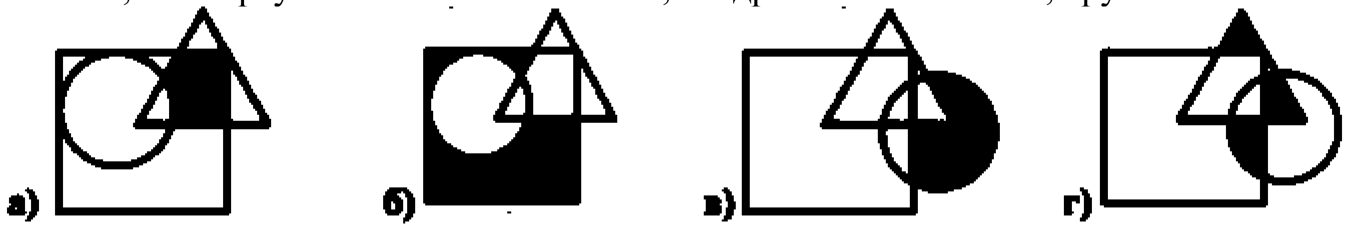
Рис. 3. Разность множеств
Цветом выделены элементы, входящие в множество А, но не входящие в Ви С.

Круги Эйлера помогают наглядно изобразить множество элементов при выполнении различных операций над множествами.

Задача 1. Пусть А - множество натуральных чисел, делящихся на 2 и меньших 8, В - множество натуральных чисел, делителей 28 и не превышающих 7.
Найдите пересечение, объединение, разность множеств А и В, разность множеств В и А. Изобразите пересечения множеств в виде кругов Эйлера.

Задача 2. Чему равны $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, если $A \subset B$? Решения изобразите на кругах Эйлера.

Задача 3. Записать через операции над множествами, чему равна заштрихованная область, если треугольник - множество X, квадрат - множество Y, круг - множество Z.



Задача 4. Даны взаимопересекающиеся множества А, В, С. Построить следующие множества при помощи кругов Эйлера:

а)$A \setminus (B \cup C)$;

б)$(A \cup B) \setminus C$;

в)$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$;

д) $(A \setminus B) \cup C$;

е) $(A \cap B) \setminus (B \cap C)$;

ж) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

З) $A \setminus (B \cap C)$.

Задача 5. В студенческой группе 25 студентов. В фитнес-центре работают 10 студентов, в баре - 8, а 10 студентов усердно грызут гранит науки и нигде не работают. Сколько студентов работают и в фитнес-центре и в баре? Сколько работают только в фитнес-центре? (Решить с помощью кругов Эйлера)

Задача 6. Из букв фамилии составьте множество А, из букв имени составить множество В, из букв отчества составить множество С, удаляя повторяющиеся буквы. Найдите: объединение множеств А, В и С, пересечение множеств А, В и С, разность А\В, разность В\А, симметрическую разность множеств А и В. Подмножества изобразите на кругах Эйлера и запишите в ответ.

Задача 7. На полке 80 книг. Из них 39 - художественных, а 51 книга имеет больше 200 страниц. Сколько художественных книг имеют больше 200 страниц? (Решить с помощью кругов Эйлера)

Задача 8. Из 24 учащихся 11 класса занимаются музыкой 10 человек, рисуют - 8 человек, увлекаются спортом - 12 человек. Занимаются музыкой и рисованием - 3 человека, а рисованием и спортом - 2, и 1 человек занимается и музыкой, и рисованием, и спортом. Сколько учеников имеет только одно увлечение? Сколько учеников упорно готовятся к ЕГЭ и не отвлекается ни на что другое? (Решить с помощью кругов Эйлера)

Элементарные события. Случайные события.

Элементарные события (элементарные исходы) опыта – это простейшие события, которыми может окончиться опыт.

В результате эксперимента всегда происходит один и только один из его исходов. То есть, с одной стороны, не могут произойти сразу два исхода, а с другой - эксперимент не может завершиться вообще без какого-либо исхода.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других (не могут происходить одновременно).

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Событие, которое в данном опыте обязательно наступит, называют достоверным событием. Достоверному событию соответствует множество всех исходов опыта Ω.

Событие, которое в данном опыте наступить не может, называют невозможным событием. Невозможному событию соответствует пустое множество исходов $\{\emptyset\}$.

Вероятностью случайного события А называется **число** Р(А), к которому приближается относительная частота этого события в длинной серии экспериментов.

Вероятность события А равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию. Сумма вероятностей всех элементарных исходов опыта равна 1.

События называются равновероятными (равновозможными), если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Событие $\acute{A}$, состоящее из тех и только тех элементарных исходов опыта, которые не входят в А, называется противоположным событию А. Вероятности противоположных событий связаны равенством:

$$\boxed{P(A) + P\left(\acute{A}\right) = 1}$$

Объединением событий $A \cup B$ – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий А, В.

Пересечение событий $A \cap B$ – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям А и В.

Задача 1. Вася, Петя, Коля и Леша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Леша.

Задача 2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно 1 раз.

Задача 3. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков.

Задача 4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Задача 5. Аня и Яна играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Ничья, если очков поровну. Аня выкинула 3 очка. Затем кубик бросает Яна. Найти вероятность того, что Яна выиграет.

Задача 6. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Задача 7. В группе туристов 300 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

Задача 8. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с чёрным и зелёным чаем, одинаковые на вид, причём пакетиков с чёрным чаем в 4 раза больше, чем пакетиков с зелёным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем.

Задача 9. В кармане у Дани было пять конфет — «Ласточка», «Взлётная», «Василёк», «Грильяж» и «Гусиные лапки», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Даня случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что упала конфета «Взлётная».

Задача 10. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Благоприятствующие элементарные события. Вероятности событий.

Элементарное событие — это одно из возможных исходов случайного эксперимента. Например, если мы бросаем монету, то возможные элементарные события — это "орел" и "решка". Если мы бросаем кубик, то элементарными событиями будут числа от 1 до 6.

Благоприятствующие события — это те элементарные события, которые приводят к желаемому результату. Например, если мы хотим получить "орел" при броске монеты, то благоприятствующее событие — это элементарное событие "орел". Если мы хотим получить четное число при броске кубика, то благоприятствующими событиями будут "2", "4" и "6".

Вероятность события — это мера того, насколько вероятно, что данное событие произойдет. Она рассчитывается по формуле:

$$\boxed{P(A) = n(A) / n(S)}$$

где $P(A)$ — вероятность события A,
$n(A)$ — количество благоприятствующих элементарных событий для события A,
$n(S)$ — общее количество элементарных событий (размер пространства элементарных событий).

Рассмотрим пример с броском кубика:
1. Общее количество элементарных событий (размер пространства S) при броске стандартного шестигранного кубика: n(S) = 6 (это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6)
2. Событие A: Получить четное число. Благоприятствующие элементарные события: {2, 4, 6}. То есть n(A) = 3.
3. Вероятность события A:
P(A) = n(A) / n(S) = 3 / 6 = 1 / 2
Таким образом, вероятность того, что при броске кубика выпадет четное число, составляет ½

Задача 1. Бросаем одну монету. Какова вероятность того, что выпадет "орел"?

Задача 2. Бросаем стандартный шестигранный кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

Задача 3. Из колоды из 52 карт извлекается одна карта. Какова вероятность того, что карта будет червой?

Задача 4. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность того, что обе монеты покажут "орел"?

Задача 5. Бросаем два стандартных шестигранных кубика. Какова вероятность того, что сумма чисел на верхних гранях будет равна 7?

Опыты с равновозможными элементарными событиями. Случайный выбор.

Вспомним, что равновозможные элементарные события - это те, у которых одинаковые возможности на реализацию. И, следовательно, такие же вероятности.

Когда в случайном опыте равновозможных элементарных событий N, то вероятность каждого будет $\frac{1}{N}$.

Это позволяет легко находить вероятности всевозможных событий данного опыта.

Пример: игральный кубик бросают один раз. Надо найти вероятность события «число очков меньше пяти».

Обозначим через N(A) число элементарных событий, благоприятствующих событию A. Их всего четыре: «на кубике одно очко», «на кубике два очка», «на кубике три очка», «на кубике четыре очка».

То есть N(A) = 4.
Всего элементарных событий N = 6.

А вероятность любого из них равна $\frac{1}{N} = \frac{1}{6}$.

Поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Пользуясь этим примером, выведем формулу:

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N}}$$

Когда в случайном опыте элементарные события равновозможны, то вероятность всякого события А в этом опыте есть отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу элементарных событий.

Задача 1. Игральный кубик (кость) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало число очков, большее чем 4?

Задача 2. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Задача 3. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Задача 4. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Задача 5. В среднем из 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.

Задача 6. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Задача 7. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза?

Задача 8. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

Задача 9. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

Дерево.

Графом называется совокупность двух множеств: непустого множества точек (вершин) и множества линий, соединяющих эти точки (ребер).

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов

Концевые точки дерева — это элементарные события эксперимента.

Задание 1. В школе проводится опрос среди учеников о предпочтениях в спорте. Из 50 учеников:
• 20 предпочитают футбол.
• 15 предпочитают баскетбол.
• 10 учеников предпочитают и футбол, и баскетбол.
• Остальные ученики не интересуются спортом.

1) Постройте дерево вероятностей, показывающее распределение учеников по их предпочтениям.
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик предпочитает футбол?

Задание 2. В школе проводятся выборы на пост президента ученического совета. В голосовании участвуют 100 учеников, которые могут выбрать одного из трех кандидатов: А, Б и В. Известно, что:
• 40% учеников предпочитают кандидата А.
• 35% учеников предпочитают кандидата Б.
• 25% учеников предпочитают кандидата В.
После того как ученики сделали свой выбор, 10% из тех, кто проголосовал за кандидата А, изменили свое мнение и решили проголосовать за кандидата Б. Также 5% из тех, кто проголосовал за кандидата Б, изменили свое мнение и решили проголосовать за кандидата В.
Постройте дерево вероятностей, показывающее распределение голосов после изменений.

Задание 3. В классе из 30 учеников 60% предпочитают заниматься физкультурой, а 40% — математикой. В конце месяца проводятся опросы о том, какой предмет они предпочли бы изучать в следующем семестре.
Из тех, кто предпочитает физкультуру:
• 70% остаются верными своему выбору.
• 30% решают перейти на математику.
Из тех, кто предпочитает математику:
• 80% остаются верными своему выбору.
• 20% решают перейти на физкультуру.

1) Постройте дерево вероятностей, показывающее распределение предпочтений учеников после опроса.
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик в итоге предпочтет физкультуру?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик в итоге предпочтет математику?

Задание 4. В кафе проводился опрос среди посетителей о предпочтениях в напитках. Из 50 опрошенных:
• 40% предпочитают кофе.
• 60% предпочитают чай.
Из тех, кто предпочитает кофе:

• 75% предпочитают черный кофе.
• 25% предпочитают капучино.
Из тех, кто предпочитает чай:
• 50% предпочитают зеленый чай.
• 50% предпочитают черный чай.

1) Постройте дерево вероятностей, показывающее распределение предпочтений напитков среди посетителей кафе.
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный посетитель предпочтет черный кофе?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранный посетитель предпочтет зеленый чай?

Задание 5. В компании проводится опрос среди сотрудников о предпочтениях в выборе места для работы. Результаты опроса показали следующее:
• 40% сотрудников предпочитают работать в офисе.
• 35% сотрудников выбирают работу удаленно.
• 25% сотрудников предпочитают гибридный формат (частично в офисе, частично удаленно).
Среди тех, кто выбрал работу в офисе:
• 70% предпочитают открытое пространство.
• 30% предпочитают отдельные кабинеты.
Среди тех, кто выбрал удаленную работу:
• 60% работают из дома.
• 40% работают из кафе.
Среди тех, кто выбрал гибридный формат:
• 40% работают из офиса и дома.
• 60% работают из офиса и кафе.

1) Постройте дерево вероятностей, показывающее распределение предпочтений среди сотрудников.
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный сотрудник предпочтет работать из кафе?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранный сотрудник выберет работу в офисе или удаленно?

Свойства дерева: единственность пути, существование висячей вершины, связь между числом вершин и числом рёбер.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

Дерево — минимальный по числу рёбер связный граф.

Висячей вершиной называется вершина, из которой выходит ровно одно ребро.

Теорема. Любые две вершины в дереве соединены единственной ребром.

Свойство 1. Если из дерева удалить ребро, то граф перестанет быть связным.

Свойство 2. Если в дереве конечное число вершин и есть хотя бы одно ребро, то в таком дереве есть концевая вершина.

Свойство 3. В конечном дереве число ребер на 1 меньше числа вершин.

Задание 1. Три друга — Андрей (А), Борис (Б) и Владимир (В) — встают в очередь. Однако, они не встают в случайном порядке. У каждого есть предпочтение, кто должен стоять перед ним:
• Андрей предпочитает стоять перед Борисом (вероятность 0.7), но не имеет предпочтений относительно Владимира.
• Борис предпочитает стоять перед Владимиром (вероятность 0.8), но не имеет предпочтений относительно Андрея.
• Владимир не имеет предпочтений.
Нарисуйте дерево возможных вариантов очереди, учитывая предпочтения друзей. Укажите вероятности на ветвях дерева.

Задание 2. Нарисуйте какое-нибудь дерево, в котором из начальной вершины к концевым ведут:
1) Ровно 3 цепи длины 5 и 1 цепь длины 3.
2) 2 цепи длины 4, 1 цепь длины 2 и 1 цепь длины 6.

Задание 3. Предположим, что в парке есть три выходы: А, Б и В. Выходы Б и В ведут к спортивной площадке, а выход А ведет к кафе. Велосипедист выбирает выход случайным образом. Какова вероятность того, что велосипедист выедет из парка к спортивной площадке?

Задание 4. В классе из 20 учеников проводится опрос о том, какие виды спорта они предпочитают.
Из 20 учеников:
- 10 учеников выбрали футбол.
- 8 учеников выбрали баскетбол.
- 5 учеников выбрали плавание.
- 3 ученика выбрали и футбол, и баскетбол.
- 2 ученика выбрали и баскетбол, и плавание.
- 1 ученик выбрал и футбол, и плавание.
- 1 ученик выбрал все три вида спорта.

Постройте дерево, представляющее предпочтения учеников, и определите, сколько висячих вершин (учеников, которые выбрали только один вид спорта) существует в этом дереве.

Задание 5. В деревне провели опрос у 50 фермеров о том, какие культуры они выращивают.
- 20 фермеров выращивают картофель.
- 15 фермеров выращивают морковь.
- 10 фермеров выращивают помидоры.
- 5 фермеров выращивают как картофель, так и морковь.
- 2 фермера выращивают как морковь, так и помидоры.
- 1 фермер выращивает как картофель, так и помидоры.
- 3 фермера выращивают все три типа культур.

Постройте дерево, представляющее результаты опроса.

Задание 6. Пусть у нас есть дерево, состоящее из n вершин. Мы знаем, что в этом дереве существует висячая вершина (вершина степени 1), и оно обладает свойством единственности пути между любыми двумя вершинами. Рассмотрите следующее:
1. Какое максимальное количество висячих вершин может иметь это дерево, если оно состоит из n вершин?
2. В каком случае в дереве будет только одна висячая вершина, и сколько в таком случае рёбер будет в дереве?
3. Если мы добавим одну вершину к этому дереву, увеличится ли максимальное количество висячих вершин? Какова будет новая структура дерева?

Задание 7. В дереве с n вершинами, где n > 2, известно, что:
- Существует единственный путь между любой парой вершин.
- Существует висячая вершина (вершина, имеющая только одну соседнюю вершину).

Определите число рёбер в этом дереве.

Задание 8. На заводе производят смартфоны. Известно, что:
• 4% готовых смартфонов являются дефектными.
• Из дефектных смартфонов 90% обнаруживаются при контроле качества.
• 2% исправных смартфонов ошибочно бракуются системой контроля.
Смартфоны, которые не были забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранные изготовленные на заводе смартфоны поступят в продажу.

Задание 9. На фабрике производят игрушки. Известно, что:
• 5% готовых игрушек являются дефектными.
• Из дефектных игрушек 85% обнаруживаются при контроле качества.
• 3% исправных игрушек ошибочно бракуются системой контроля.
Игрушки, которые не были забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная на фабрике игрушка поступит в продажу.

Задание 10. В маленьком городке есть три магазина, которые продают мороженое: "Сладкое счастье", "Летний холод" и "Морозный рай". Известно, что:
• В магазине "Сладкое счастье" 80% покупателей выбирают шоколадное мороженое.
• В магазине "Летний холод" 60% покупателей выбирают фруктовое мороженое.
• В магазине "Морозный рай" 50% покупателей выбирают ванильное мороженое.
Каждый магазин привлекает разное количество покупателей:
• "Сладкое счастье" привлекает 50% всех покупателей мороженого.
• "Летний холод" — 30%.
• "Морозный рай" — 20%.
Теперь, если случайно выбранный покупатель купил шоколадное мороженое, какова вероятность того, что он купил его в магазине "Сладкое счастье"?

Правило умножения.

Правило умножения в теории вероятностей используется для вычисления вероятности совместного наступления двух или более событий. В зависимости от того, являются ли эти события зависимыми или независимыми, правило умножения имеет разные формулировки.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от наступления другого. Для независимых событий правило умножения звучит так:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

где $P(A \cap B)$ — вероятность одновременного наступления событий A и B,
$P(A)$ — вероятность события A,
$P(B)$ — вероятность события B.

Пример: Предположим, мы бросаем две монеты. Вероятность того, что первая монета покажет "орел" (событие A), равна $P(A) = ½$, и вероятность того, что вторая монета также покажет "орел" (событие B), равна $P(B) = ½$. Поскольку броски монет независимы, вероятность того, что обе монеты покажут "орел", будет:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1 / 2 \cdot 1 / 2 = 1 / 4$

События A и B называются зависимыми, если вероятность наступления одного события зависит от наступления другого. Для зависимых событий правило умножения формулируется следующим образом:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

где $P(B \mid A)$ — условная вероятность события B, при условии, что событие A уже произошло.

Пример: Предположим, что из колоды карт (52 карты) мы извлекаем одну карту, не возвращая её обратно. Вероятность того, что первая карта будет червовой (событие A), равна: $P(A) = 13 / 52 = 1 / 4$
Если первая карта была червовой, то в колоде осталось 51 карта, из которых 12 — червовые. Вероятность того, что вторая карта тоже будет червовой (событие B), при условии, что первая была червовой, равна: $P(B \mid A) = 12 / 51$
Таким образом, вероятность того, что обе карты будут червовыми:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 1 / 4 \cdot 12 / 51 = 12 / 204 = 1 / 17$

Задача 1. Пусть вероятность того, что завтра будет дождь, равна 0.3, а вероятность того, что я пойду на прогулку, равна 0.5. Какова вероятность того, что и дождь пойдет, и я пойду на прогулку?

Задача 2. В урне находятся 3 красных и 2 синих шара. Если мы сначала вытаскиваем один шар (без возвращения), а затем второй, какова вероятность того, что оба шара будут красными?

Задача 3. В магазине 40% покупателей покупают хлеб, а 30% — молоко. Какова вероятность того, что случайно выбранный покупатель купит и хлеб, и молоко?

Задача 4. Вероятность того, что студент сдаст экзамен по математике, равна 0.75, а по физике — 0.65. Какова вероятность того, что студент сдаст оба экзамена?

Задача 5. В классе из 20 учеников 12 мальчиков и 8 девочек. Если случайно выбирается один ученик, а затем без возвращения выбирается еще один ученик, какова вероятность того, что оба выбранных ученика будут мальчиками?

Задача 6. В коробке лежат 5 шоколадных конфет и 3 карамельные. Два человека по очереди берут из коробки по одной конфете, не возвращая их обратно.
а) Какова вероятность, что первый человек возьмет шоколадную конфету, а второй - карамельную?
б) Какова вероятность, что оба человека возьмут шоколадные конфеты?

Задача 7. В мешке 7 красных шариков и 5 синих. Из мешка вынимают один за другим два шарика. Какова вероятность, что первый шарик окажется синим, а второй — красным?

Задача 8. В лотерее разыгрывается 3 выигрышных билета и 7 пустых. Покупают два билета. Какова вероятность того, что первый билет окажется выигрышным, а второй — проигрышным?

Задача 9. Студент может сдать экзамен хорошо (вероятность 0.6) или плохо (вероятность 0.4). Если он сдал экзамен хорошо, то вероятность получить стипендию составляет 0.8. Если он сдал экзамен плохо, то вероятность получить стипендию составляет 0.2
а) Какова вероятность того, что студент получит стипендию?
б) Если студент получил стипендию, какова вероятность, что он сдал экзамен хорошо?

Задача 10. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.

Задача 11. Монетку подкидывают 4 раза. Найдите вероятность того, что 4 раза выпадет орёл.

Задача 12. Футбольная команда А. забивает пенальти с вероятностью 0.8, если бьёт первой. Если бьёт второй, тозабивает с вероятностью 0.7. Команды пробивают по одному пенальти. Какова вероятность, что команда А. забьёт оба своих пенальти?

Задача 13. Баскетболист А. попадает в кольцо с вероятностью 0.9, если бросает первым. Если бросает вторым,то попадает с вероятностью 0.8. Он делает два броска, чередуясь с другим игроком. Какова вероятность, что А. попадёт оба раза?

Противоположное событие.

Событием, противоположным событию А, называют событие $\overline{\text{A}}$, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию А.

Если событие В противоположно событию А, то есть В = $\overline{\text{A}}$, то событие А противоположно событию $\frac{B}{A}$ = В. Поэтому события А и $\overline{\text{A}}$ называют взаимно противоположными.

Вероятности противоположных событий в сумме равны единице.

Задание 1. В классе из 30 учеников 18 предпочитают заниматься спортом после школы, а 12 — заниматься искусством. Из них 8 учеников занимаются и спортом, и искусством.

1) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается спортом или искусством?
2) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик не занимается ни спортом, ни искусством?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается только спортом?

Задание 2. В магазине есть 50 игрушек: 30 из них — мягкие игрушки, а 20 — конструкторы. Из мягких игрушек 10 являются плюшевыми, а из конструкторов 5 являются магнитными.

1) Какова вероятность того, что случайно выбранная игрушка — это мягкая игрушка или магнитный конструктор?
2) Какова вероятность того, что случайно выбранная игрушка не является ни мягкой игрушкой, ни магнитным конструктором?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранная игрушка является только мягкой игрушкой?

Задание 3. В школьной библиотеке есть 50 книг: 20 художественных, 15 научных и 15 учебников. Из художественных книг 8 имеют красную обложку, из научных 5 — синюю, а из учебников 3 — зеленую.

1) Какова вероятность того, что случайно выбранная книга — это художественная или имеет красную обложку?
2) Какова вероятность того, что случайно выбранная книга не является ни художественной, ни имеющей красную обложку?
3) Какова вероятность того, что случайно выбранная книга является только учебником?

Задание 4. В исследовательском центре разрабатывают новый препарат для лечения аллергии. В ходе клинических испытаний препарат показал эффективность в 85% случаев (событие А: препарат эффективен). Испытания проводились на группе из 200 пациентов.

Какова вероятность того, что препарат окажется неэффективным для случайно выбранного пациента из этой группы?

Задание 5. В городе планируют построить новый парк развлечений. Перед началом строительства проводится опрос жителей города, чтобы оценить интерес к различным аттракционам. Результаты опроса показали, что 70% жителей хотели бы видеть в парке американские горки.

1) Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города НЕ хочет видеть американские горки в новом парке?
2) Если в городе проживает 50 000 человек, сколько человек, приблизительно, НЕ хотят видеть американские горки в новом парке?

Диаграммы Эйлера. Объединение и пересечение событий.

Диаграммы Эйлера — это графический способ визуализации отношений между множествами, который часто используется в теории вероятностей для представления событий и их объединений и пересечений.

1. События: В теории вероятностей событием является любое подмножество исходного пространства. Например, события A и B могут представлять собой различные группы исходов.

2. Объединение: Объединение двух событий A и B обозначается как $A \cup B$. Это событие включает все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из событий A или B.

3. Пересечение: Пересечение двух событий A и B обозначается как $A \cap B$. Это событие включает только те элементы, которые принадлежат одновременно обоим событиям A и B.

Визуализация с помощью диаграмм Эйлера

1. События:
- Пусть A — событие, что выбранный элемент принадлежит множеству A.
- Пусть B — событие, что выбранный элемент принадлежит множеству B.

2. Диаграмма:
- Нарисуйте два круга, которые пересекаются. Один круг будет представлять событие A, а другой — событие B.
- Область, где круги пересекаются, представляет собой пересечение $A \cap B$.
- Области, которые не пересекаются, представляют элементы, которые принадлежат только одному из событий.
- Область $A \cap B$ — это часть, где круги пересекаются.
- Области только A и только B — это части кругов, которые не входят в пересечение.

Если у нас есть три события A, B и C, диаграмма будет более сложной:

1. События:
- Пусть A, B, и C — три события.

2. Диаграмма:
- Нарисуйте три круга, которые пересекаются между собой
- Пересечения между всеми тремя событиями будут находиться в центре, где все три круга перекрываются.
- Вы также можете выделить области, где только два события пересекаются (например, $A \cap B$, но не C).

Применение в задачах:

- Объединение: Если вам нужно найти вероятность объединения двух событий, вы можете использовать формулу:

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

• Пересечение: Если события независимы, то вероятность их пересечения можно найти так:
P(A ∩ B) = P(A) · P(B)

Задача 1. Два события
В классе 20 учеников. 12 из них занимаются спортом, а 8 — музыкой. Из них 5 занимаются и спортом, и музыкой.
Найдите количество учеников, которые занимаются хотя бы одним из этих видов деятельности.

Задача 2. Три события
В группе студентов 10 человек изучают математику, 8 — физику, и 6 — химию. Из них 4 изучают математику и физику, 3 — математику и химию, 2 — физику и химию, и 1 студент изучает все три предмета.
Сколько студентов изучают хотя бы один из этих предметов?

Задача 3. Пересечение двух событий
В библиотеке есть 30 книг. Из них 18 книг по математике и 15 книг по физике. Из них 10 книг относятся к обеим дисциплинам.
Сколько книг по математике или физике?

Задача 4. Несколько событий
В опросе о предпочтениях среди студентов выяснили, что 40% любят кофе, 30% предпочитают чай, а 10% любят и кофе, и чай.
Какова вероятность того, что студент любит либо кофе, либо чай?

Задача 5. Четыре события
В спортивной секции есть 50 участников. Из них:
• 20 занимаются футболом,
• 15 — волейболом,
• 10 — баскетболом,
• 5 занимаются всеми тремя видами спорта.
Известно, что:
• 10 занимаются футболом и волейболом,
• 8 — футболом и баскетболом,
• 6 — волейболом и баскетболом.
Сколько участников занимаются хотя бы одним видом спорта?

Несовместные события. Формула сложения вероятностей.

В случае, когда события A и B не содержат аналогичных содействующих элементарных событий, получаем их несовместность, то есть их пересечение является невозможным событием.

Поэтому вероятность пересечения несовместных событий равняется нулю:

$$\boxed{P(A \cap B) = 0}$$

Пример: дважды совершили бросок кубика. Событие А - «в первый раз выпало больше очков, чем во второй». Событие В же - «во второй раз выпало больше очков, чем в первый». Зафиксируем элементарные события, отражающие содействующие каждому из представленных событий.

1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6
2:1	2:2	2:3	2:4	2:5	2:6
3:1	3:2	3:3	3:4	3:5	3:6
4:1	4:2	4:3	4:4	4:5	4:6
5:1	5:2	5:3	5:4	5:5	5:6
6:1	6:2	6:3	6:4	6:5	6:6

Видим, что одинаковые элементарные события отсутствуют. Объясняется это невозможностью того, что при первом броске выпало больше, чем при втором, и вместе с тем при втором броске выпало больше, чем при первом. События А и В в этом опыте несовместны.

Для несовместных событий справедливо правило сложения вероятностей.

Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей, то есть: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Опираясь на предыдущий пример, отметим, что $P(A) = P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Тогда вероятность события $A \cup B$ равна $\frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$.

Отметим, что данная формула верна только для несовместных событий.

Графически несовместные события изображаются при помощи двух фигур, которые не пересекаются - это является диаграммой Эйлера.

Задача 1. Игральную кость (кубик) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало очков, не меньшее, чем 3? Запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Задача 2. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из Италии Джованни Лучио будет выступать первым, вторым или третьим. Запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Задача 3. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Задача 4. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. Запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Задача 5. В магазине канцтоваров продается 120 ручек, из них 15 – красных, 22 – зеленых, 27 – фиолетовых, еще есть синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что Алиса наугад вытащит синюю или зеленую ручку. Запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Задача 6. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Окружность», равна 0,21. Вероятность того, что это вопрос по теме «Углы», равна 0,33. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Задача 7. На тестировании по географии учащийся Петров решает задачи:
- вероятность того, что он верно решит больше 10 задач, равна 0,67;
- вероятность того, что он верно решит больше 9 задач, равна 0,75.

Найдите вероятность того, что Петров верно решит ровно 10 задач.

Задача 8. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.

Правило умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события.

Правило умножения вероятностей используется для нахождения вероятности одновременного наступления двух или более событий. Оно гласит:

1. Для независимых событий A и B :

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Это означает, что вероятность того, что оба события произойдут, равна произведению их вероятностей.

2. Для зависимых событий A и B :

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

Здесь $P(B \mid A)$ — это условная вероятность события B при условии, что событие A произошло.

Условная вероятность — это вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло. Она обозначается как $P(B \mid A)$ и вычисляется по формуле:

$$\boxed{P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)}$$

где $P(A) > 0$.

Пример: Предположим, что в урне 3 красные и 2 синие шара. Если мы знаем, что выбранный шар красный (событие A), то вероятность того, что он будет большим (событие B), можно вычислить, если у нас есть информация о количестве больших красных шаров.

События называются независимыми, если наступление одного события не влияет на вероятность наступления другого. Для независимых событий выполняется следующее:

Если A и B независимы, то: $\boxed{P(A \mid B) = P(A)}$
Это означает, что знание о том, что произошло событие B , не изменяет вероятность события A .

Пример: Допустим, бросаем две игральные кости. Событие A : первая кость показывает 4. Событие B : вторая кость показывает 5. Эти события независимы, так как результат одной кости не влияет на результат другой.

Задача 1.В классе из 30 учеников 18 мальчиков и 12 девочек. Из мальчиков 10 занимаются спортом, а из девочек 8 занимаются спортом. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается спортом?

Задача 2.Известно, что выбранный ученик — мальчик. Какова вероятность того, что он занимается спортом?

Задача 3.В мешке находятся 4 красных и 6 синих шаров. Мы будем поочередно вытаскивать два шара из мешка с возвращением. Какова вероятность того, что оба шара будут красными?

Задача 4.У вас есть две игральные кости. Какова вероятность того, что при броске обе кости покажут четные числа?

Задача 5.В урне находятся 5 красных и 3 зеленых шара. Если мы извлекли один красный шар и не возвращаем его обратно, какова вероятность того, что следующий извлеченный шар будет зеленым?

Задача 6.В классе из 30 учеников: 15 мальчиков и 15 девочек. Из мальчиков 9 занимаются спортом, а из девочек 6 занимаются спортом. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается спортом? Какова вероятность того, что если выбранный ученик — мальчик, то он занимается спортом?

Представление случайного эксперимента в виде дерева

Если в задаче описывается последовательность случайных опытов, и следующий опыт зависит от исхода предыдущего, для разделения возможных сценариев развития событий часто используют схему "дерево вероятностей".

В дереве случайного опыта элементарные события изображаются цепями, идущими от начальной вершины к концевым. Поэтому количество концевых вершин в дереве случайного опыта равно числу элементарных событий.

Задание 1. В корзине находятся три вида фруктов: яблоки, бананы и апельсины.
- Паша решает выбрать один фрукт из корзины, а затем, не возвращая выбранный фрукт обратно, выбрать еще один.
Как можно представить этот случайный эксперимент в виде дерева?

Задание 2. Анна планирует свое путешествие на отдых. У нее есть два варианта транспорта: самолет или поезд. После того как она выберет транспорт, у нее есть два варианта размещения: отель или квартира. Как можно представить этот случайный эксперимент в виде дерева?

Задание 3. В школе организован конкурс талантов, где ученики могут продемонстрировать свои навыки в разных категориях. Участникам предлагается выбрать один из трех видов искусства: музыка, живопись или танцы. После выбора категории, они могут выбрать один из двух стилей: классический или современный. Как можно представить этот случайный эксперимент в виде дерева?

Задание 4. Ваша футбольная команда принимает участие в турнире, где есть 3 матча. Каждый матч может закончиться одной из трех возможных результатов: победа (П), ничья (Н) или поражение (По). Вероятности для каждого результата в одном матче следующие:

- Победа: 40% (0,4)
- Ничья: 30% (0,3)
- Поражение: 30% (0,3)

Постройте дерево вариантов для результатов трех матчей.

Задание 5. Вы – владелец кафе и решили провести эксперимент по созданию нового напитка. У вас есть два основных компонента: сироп и газировка. Вы можете использовать несколько вариантов для каждого компонента.
Компоненты:
Сироп (можно выбрать один из трех):

- Ванильный (В)
- Мятный (М)
- Клубничный (К)

Газировка (можно выбрать один из двух):

- Лимонная (Л)
- Апельсиновая (А)

Вы собираетесь провести эксперимент в три этапа: каждую комбинацию сиропа с газировкой можно пробовать три раза. Вы должны выяснить, какие варианты являются самым популярными среди ваших клиентов.
Постройте дерево решений для всех возможных сочетаний сиропов и газировок на каждом из трех этапов.

Задание 6. Представьте, что вы капитан пиратского корабля, который отправился на поиск сокровищ. На вашем пути есть 4 острова: А, Б, В и Г. На каждом острове вы можете выбрать, исследовать его или пропустить. Если вы решите исследовать остров, то найдете сокровище с вероятностью:

- Остров А: 60%
- Остров Б: 40%
- Остров В: 30%
- Остров Г: 50%

Постройте дерево, описывающее все возможные решения. Укажите, какие острова вы решите исследовать, а какие пропустить.
Вычислите вероятность нахождения сокровища в зависимости от выбранного пути (например, если вы исследуете только острова А и Б, какая вероятность найти сокровище?)

Задание 7. Саша решил развлечься и провести эксперимент с бросками двух шестигранных кубиков. Она сделает два броска и запишет результаты.

- На первом броске кубика Саша может получить одно из шести значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- После первого броска, независимо от результата, Саша бросает второй кубик, который также может показать одно из шести значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Постройте дерево решений для этого эксперимента, чтобы отобразить все возможные результаты бросков кубиков.
Какова вероятность того, что сумма значений двух кубиков будет равна 7?

Задание 8. В кафе есть три вида мороженого: шоколадное, ванильное и клубничное. Каждый клиент может выбрать один из двух видов вафель: с шоколадом или без.
Случайный эксперимент заключается в следующем:

- Клиент сначала выбирает один из трех видов мороженого (шоколадное, ванильное или клубничное).
- Затем он выбирает один из двух видов вафель (с шоколадом или без).

Постройте дерево решений для этого эксперимента, чтобы отобразить все возможные комбинации выбора мороженого и вафель.
Какова вероятность того, что клиент выберет ванильное мороженое и вафли с шоколадом?

Задание 9. Предположим, вы участвуете в игре, которая состоит из двух этапов:
На первом этапе вы подбрасываете монетку:

- Если выпадает "Орёл", переходите ко второму этапу.
- Если выпадает "Решка", игра заканчивается, и вы ничего не выигрываете.

На втором этапе вы бросаете шестигранный кубик с числами от 1 до 6:

- Если выпало чётное число (2, 4, 6), вы выигрываете 10 очков.
- Если выпало нечётное число (1, 3, 5), вы выигрываете 5 очков.

Постройте дерево решений для данного случайного эксперимента, отображая все возможные исходы игры.
Какова вероятность того, что вы выиграете 10 очков в этой игре?

Задание 10. Представьте, что группа друзей планирует поездку на море. Они рассматривают два маршрута:

- Прямой маршрут (А)
- Объездной маршрут (Б)

Если ребята выбирают маршрут А, то у них есть два варианта:

- Автобус прибывает вовремя: 0,7
- Автобус опаздывает: 0,3

Если они выбирают маршрут Б, то тоже есть два варианта:

- Автобус попадает в пробку: 0,5
- Автобус едет без задержек: 0,5

Постройте дерево решений для данного случайного эксперимента, изобразив все возможные исходы.

Какова вероятность того, что автобус не опоздает ни при каком из маршрутов?