«Образование каждому»

математический кейс
для детей с ОВЗ для 8 класса

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рациональные дроби

Рациональные дроби и их свойства

Целые выражения – это выражения, составленных из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, отличное от нуля. Так, целыми являются выражения: *7a²b*, *m³+n³*, *a+58* и т.д.

В отличие от них выражения: *4a-b2a+1*, *x+yx2-3xy+y2*, помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными. Такие выражения называют **дробными выражениями**.

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

При умножении или делении числителя и знаменателя алгебраической дроби на одно и то же алгебраическое выражение (отличное от нуля) получается равная ей дробь:

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}, b\neq 0, m\neq 0$$

Это свойство аналогично основному свойству обычной числовой дроби: мы можем одновременно умножать или делить числитель и знаменатель на любое выражение, сокращать на общий множитель, если он существует.

Например:

$$\frac{2x+3y}{4x^2-9y^2}=\frac{2x+3y}{(2x+3y)(2x-3y)}=\frac{1}{2x-3y}$$

$$\frac{a^3-8}{a-2}=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a-2}=a^2+2a+4$$

Сложение дробей с разными знаменателями

Теперь научимся складывать дроби с разными знаменателями. Когда складывают дроби, знаменатели этих дробей должны быть одинаковыми. Но одинаковыми они бывают не всегда.

Например, дроби $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{4}$ сложить можно, поскольку у них одинаковые знаменатели.

А вот дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ сразу сложить нельзя, поскольку у этих дробей разные знаменатели. В таких случаях дроби нужно приводить к одинаковому (общему) знаменателю.

Существует несколько способов приведения дробей к одинаковому знаменателю. Сегодня мы рассмотрим только один из них, поскольку остальные способы могут показаться сложными для начинающего.

Суть этого способа заключается в том, что сначала ищется наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей обеих дробей. Затем НОК делят на знаменатель первой дроби и получают первый дополнительный множитель. Аналогично поступают и со второй дробью — НОК делят на знаменатель второй дроби и получают второй дополнительный множитель. Затем числители и знаменатели дробей умножаются на свои дополнительные множители. В результате этих действий, дроби у которых были разные знаменатели, обращаются в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как складывать такие дроби мы уже знаем.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$

У этих дробей разные знаменатели, поэтому нужно привести их к одинаковому (общему) знаменателю.

В первую очередь находим наименьшее общее кратное знаменателей обеих дробей. Знаменатель первой дроби это число 3, а знаменатель второй дроби — число 2. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 6

НОК (2 и 3) = 6

Теперь возвращаемся к дробям $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Сначала разделим НОК на знаменатель первой дроби и получим первый дополнительный множитель. НОК — это число 6, а знаменатель первой дроби это число 3. Делим 6 на 3, получаем 2.

Полученное число 2 это первый дополнительный множитель. Записываем его к первой дроби. Для этого делаем небольшую косую линию над дробью и записываем над ней найденный дополнительный множитель:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 2}$$

Аналогично поступаем и со второй дробью. Делим НОК на знаменатель второй дроби и получаем второй дополнительный множитель. НОК — это число 6, а знаменатель второй дроби — число 2. Делим 6 на 2, получаем 3.

Полученное число 3 это второй дополнительный множитель. Записываем его ко второй дроби. Опять же делаем небольшую косую линию над второй дробью и записываем над ней найденный дополнительный множитель:

$$\frac{1}{2}^{\backslash 3}$$

Теперь у нас всё готово для сложения. Осталось умножить числители и знаменатели дробей на свои дополнительные множители:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 2} + \frac{1}{2}^{\backslash 3} = \frac{2\times2}{3\times2} + \frac{1\times3}{2\times3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6}$$

Посмотрите внимательно к чему мы пришли. Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как складывать такие дроби мы уже знаем. Давайте дорешаем этот пример до конца:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 2} + \frac{1}{2}^{\backslash 3} = \frac{2\times2}{3\times2} + \frac{1\times3}{2\times3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Таким образом, пример завершается. К $\frac{2}{3}$ прибавить $\frac{1}{2}$ получается $1\frac{1}{6}$.

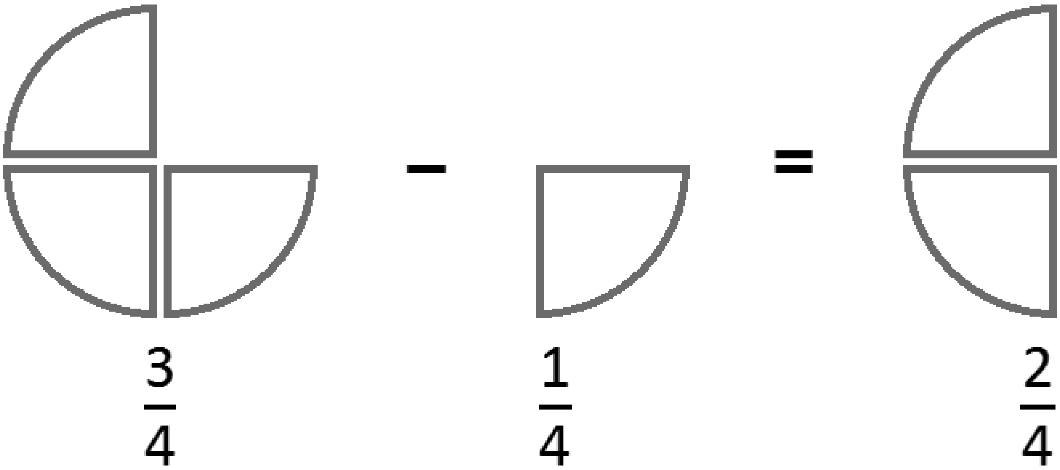
Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

Чтобы вычесть из одной дроби другую, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменения.

Например, найдём значение выражения $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$. Чтобы решить этот пример, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменения. Так и сделаем:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на четыре части. Если от $\frac{3}{4}$ пиццы отрезать $\frac{1}{4}$ пиццы, то получится $\frac{2}{4}$ пиццы:



Вычитание дробей с разными знаменателями

Например, от дроби $\frac{3}{4}$ можно вычесть дробь $\frac{1}{4}$, поскольку у этих дробей одинаковые знаменатели. А вот от дроби $\frac{2}{3}$ нельзя вычесть дробь $\frac{1}{4}$, поскольку у этих дробей разные знаменатели. В таких случаях дроби нужно приводить к одинаковому (общему) знаменателю.

Общий знаменатель находят по тому же принципу, которым мы пользовались при сложении дробей с разными знаменателями. В первую очередь находят НОК знаменателей обеих дробей. Затем НОК делят на знаменатель первой дроби и получают первый дополнительный множитель, который записывается над первой дробью. Аналогично НОК делят на знаменатель второй дроби и получают второй дополнительный множитель, который записывается над второй дробью.

Затем дроби умножаются на свои дополнительные множители. В результате этих операций, дроби у которых были разные знаменатели, обращаются в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как вычитать такие дроби мы уже знаем.

Пример 1. Найти значение выражения: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$
У этих дробей разные знаменатели, поэтому нужно привести их к одинаковому (общему) знаменателю.

Сначала находим НОК знаменателей обеих дробей. Знаменатель первой дроби это число 3, а знаменатель второй дроби — число 4. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 12

НОК (3 и 4) = 12

Теперь возвращаемся к дробям $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$

Найдём дополнительный множитель для первой дроби. Для этого разделим НОК на знаменатель первой дроби. НОК — это число 12, а знаменатель первой дроби — число 3. Делим 12 на 3, получаем 4. Записываем четвёрку над первой дробью:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 4}$$

Аналогично поступаем и со второй дробью. Делим НОК на знаменатель второй дроби. НОК — это число 12, а знаменатель второй дроби — число 4. Делим 12 на 4, получаем 3. Записываем тройку над второй дробью:

$$\frac{1}{4}^{\backslash 3}$$

Теперь у нас всё готово для вычитания. Осталось умножить дроби на свои дополнительные множители:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 4} - \frac{1}{4}^{\backslash 3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$$

Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как вычитать такие дроби мы уже знаем. Давайте дорешаем этот пример до конца:

$$\frac{2}{3}^{\backslash 4} - \frac{1}{4}^{\backslash 3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8 - 3}{12} = \frac{5}{12}$$

Умножение дробей

Чтобы перемножить дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели. Если в ответе получится неправильная дробь, нужно выделить в ней целую часть.

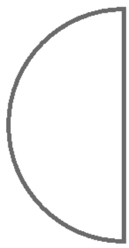
Пример 1. Найти значение выражения $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$.
Умножаем числитель первой дроби на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$$

Получили ответ $\frac{2}{6}$. Желательно сократить данную дробь.
Дробь $\frac{2}{6}$ можно сократить на 2. Тогда окончательное решение примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Выражение $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ можно понимать, как взятие $\frac{2}{3}$ пиццы от половины пиццы. Допустим, у нас есть половина пиццы:



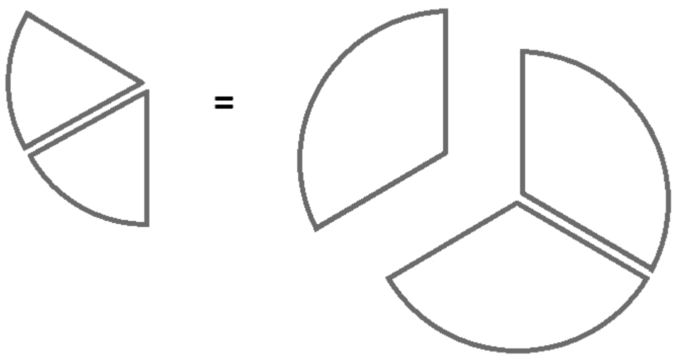
$\frac{1}{2}$

Как взять от этой половины две третьих? Сначала нужно поделить эту половину на три равные части:

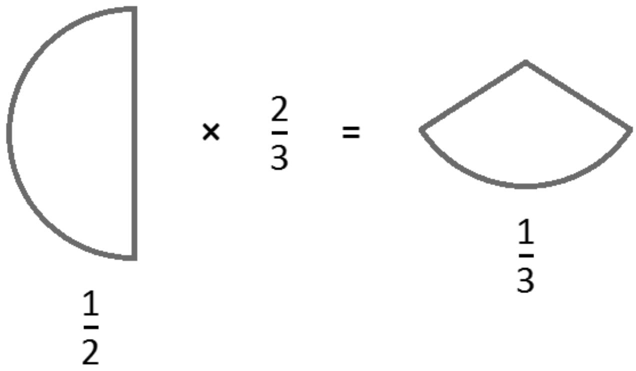
И взять от этих трех кусочков два:

У нас получится $\frac{1}{3}$ пиццы. Вспомните, как выглядит пицца, разделенная на три части:

Один кусок от этой пиццы и взятые нами два кусочка будут иметь одинаковые размеры:



Другими словами, речь идет об одном и том же размере пиццы. Поэтому значение выражения $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ равно $\frac{1}{3}$


$\times \frac{2}{3} =$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$

Деление дробей

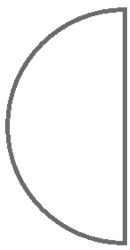
Чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Например, разделим $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{4}$

Чтобы разделить $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{4}$, нужно $\frac{1}{2}$ умножить на дробь, обратную дроби $\frac{1}{4}$. А обратная дроби $\frac{1}{4}$ это дробь $\frac{4}{1}$

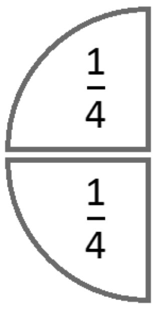
$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{1 \times 4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Допустим, имеется половина пиццы:



$\frac{1}{2}$

Если зададим вопрос *«сколько раз четверть пиццы содержится в этой половине»*, то ответом будет 2. Действительно, четверть пиццы содержится в половине пиццы два раза:



Задачи для практики

Рациональные дроби и их свойства

1. Какие из выражений являются целыми, а какие дробными?

а) $7x^2y$

б) $\frac{1}{3}x^2y$

в) $z^3 + x^3$

г) $\frac{x}{2y+1}$

д) $2x \div y$

целые	дробные

2. Найдите значение дроби

$\frac{y-1}{4}$ при $y =$

y=3	y=1	y=-5	y= 1/2	y=-1,6	y=100

3. При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

а) $\frac{x}{x-2}$

б) $\frac{z+4}{z^2+7}$

в) $\frac{y^2-1}{y} + \frac{y}{y-3}$

г) $\frac{x+10}{x(x-1)} - 1$

4. При каком значении дроби x – 3/5 равно:

x – 3/5 = 1	x – 3/5 = 0	x – 3/5 = -1	x – 3/5 = 3
x=…	x=…	x=…	x=…

Сумма и разность дробей

5. Преобразуйте выражение, представив его в виде дроби:

а) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$;

б) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$;

в) $\frac{a-2}{8a}+\frac{2a+5}{8a}-\frac{3-a}{8a}$;

г) $\frac{11a-2b}{4a}+\frac{2a-3b}{4a}-\frac{a-b}{4a}$.

6. Докажите, что:

а) выражение $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ тождественно равно 4;

б) выражение $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ тождественно равно 2.

7. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}$

б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3}-\frac{10x}{(5-x)^3}$

8. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{x^2+y^2}{x^4}$

б) $\frac{2x-y}{b}$

в) $\frac{a^2+1}{2a}$

г) $\frac{x^2-3xy}{x^3}$

Произведение и частное дробей

9. Выполните умножение:

$$\frac{12}{5x}\cdot\frac{x^3}{12a};\quad\frac{8c^2}{15m}\cdot\frac{1}{4c^2}$$

10. Упростите выражение:

$$\frac{72x^4}{25y^5}\cdot\left(-\frac{2{,}5y^4}{27x^5}\right);\quad\frac{18m^3}{11n^3}\cdot\frac{22n^4}{9m^2}$$

11. Упростите выражение:

$$\frac{x^2-10x+2}{3x+12} \cdot \frac{x^2-16}{2x-10}; \quad \frac{y^2-25}{y^2+12y+36} \cdot \frac{3y+18}{2y+10}$$

12. Упростите выражение:

$$\frac{a^2-4ac+3bc}{a^2-ab+bc-ac} + \frac{a+3b}{b-a} + \frac{a+2c}{a-c}$$

Квадратные корни

Определение действительных чисел

Рациональные числа объединяют в себе целые числа и дробные числа. А действительные числа объединяют рациональные и иррациональные числа. Отсюда сформулируем определения различных видов чисел:

Рациональное число — это число, которое можно представить в виде положительной или отрицательной обыкновенной дроби или числа ноль. Множество рациональных чисел –

$$Q = \{\frac{m}{n}; n \in N, m \in Z\}$$

Иррациональное число — это число, которое невозможно выразить в форме деления двух целых чисел, то есть в рациональной дроби m/n. Оно может быть выражено в форме бесконечной непериодической десятичной дроби. Примеры иррациональных чисел –

$$I = \{\sqrt{2}, \pm\pi; \sqrt{3}; \sqrt{5} \ldots\}$$

Множество ***действительных (вещественных) чисе***л состоит из множества рациональных и множества иррациональных чисел. Оно обозначается буквой R, а также его можно записать как (-∞; +∞). Можно записать так, что R есть объединение двух множеств: рациональных и иррациональных чисел: R = Q u I.

Примеры действительных чисел:

$7,\ 2038,\ \ -24,\ \frac{2}{9},\ \ -53\frac{12}{47},\ \ -3,15,\ 0,36(142)\ \ -19,75283584\ldots,\ e,\ \pi,\ \ -\sqrt{10},\ \sqrt[7]{6},\ \cos 6,\ \log_5 10$

Действительные числа могут быть как положительными, так и отрицательными, а также *нулем*.

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют такое неотрицательное число b ($b \geq 0$), вторая степень которого равна a.

Запишем это определение на математическом языке:

$$\sqrt{a} = b, \qquad \text{при этом} \quad b^2 = a$$

Убедимся в правильности данной записи на примере.

Пусть $a = 16$, $b = 4$, тогда:

$\sqrt{16} = 4,$ $\qquad\qquad 4^2 = 16$

Всё верно: если 4 в квадрате равно 16, значит корень из 16 равен 4.

Извлечем парочку корней:

$\sqrt{0} = 0;$

$\sqrt{1} = 1;$

$\sqrt{4} = 2;$

$\sqrt{256} = 16$ и т.д.

Обратите внимание, что <u>подкоренное выражение неотрицательно</u>!

Извлечение корней из отрицательных чисел - это уже совсем другая история и в школьной математике не рассматривается.

Свойства арифметического квадратного корня (*далее корень*)

1. Корень произведения равен произведению корней ($a \geq 0$, $b \geq 0$).

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$$

Примеры:

$$\sqrt{225 * 1296} = \sqrt{225} * \sqrt{1296} = 15 * 36 = 540$$

$$\sqrt{2} * \sqrt{72} = \sqrt{2 * 72} = \sqrt{144} = 12$$

2. Корень частного равен частному корней ($a \geq 0$, $b > 0$).

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Примеры:

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

3. Корень в квадрате равен подкоренному выражению ($a \geq 0$).

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Примеры:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$\left(\sqrt{3^3}\right)^2 = 3^3 = 27$$

4. Корень из квадрата числа равен модулю этого числа (a - любое).

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Примеры:

$\sqrt{6^2} = |6| = 6$

$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

5. Корень из степени с основанием ***a*** и показателем ***n*** равен корню из числа ***a*** в степени ***n*** ($a \geq 0$, n - натуральное).

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$$

Пример:

$\sqrt{2^5} = (\sqrt{2})^5$

Свойство работает в обе стороны.

Задачи для практики

Действительные числа

13. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}$; д) $-\frac{8}{15}$; ж) -17; и) $-1\frac{3}{40}$;

б) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{20}{9}$; е) $10{,}28$; з) $\frac{3}{16}$; к) $2\frac{7}{11}$.

14. Упростите выражение:

а) $\frac{x}{x-y} + \frac{3x}{x+y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$

б) $\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{x}{x^2-1}$

15. Верно ли то, что:

а) $7{,}16 \in N$; $7{,}16 \in Z$; $7{,}16 \in Q$; $7{,}16 \in R$;
б) $409 \in N$; $409 \in Z$; $409 \in Q$; $409 \in R$;
в) $\pi \in N$; $\pi \in Z$; $\pi \in Q$; $\pi \in R$?

16. Упростите выражение:

а) $\left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right) : \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)$

б) $\left(\frac{x+y}{y} - \frac{x}{x+y}\right) : \left(\frac{x+y}{x} - \frac{y}{x+y}\right)$

Арифметический квадратный корень

17. Докажите, что:

а) $\sqrt{121} = 11$; б) $\sqrt{169} = 13$; в) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$; г) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

18. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a+b}$ при $a =$
б) $\sqrt{3x-5}$ при $x =$
в) $x + \sqrt{x}$ при $x =$

а)	**a = 33; b = -8**
Ответ:	

б)	x = 23; b = 1,83
Ответ:	

в)	**x = 0**	**x = 0,01**	**x = 0,36**	**x = 0,64**
Ответ:				
	x = 1	**x = 25**	**x = 100**	**x = 3600**
Ответ:				

19. Пользуясь таблицей натуральных чисел, найти:

а) $\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{361}$;

б) $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{3,24}$, $\sqrt{2,56}$, $\sqrt{2,25}$;

в) $\sqrt{576}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{3721}$, $\sqrt{7396}$;

г) $\sqrt{7,29}$, $\sqrt{13,69}$, $\sqrt{56,25}$, $\sqrt{77,44}$.

Единицы

Десятки	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

20. Найдите значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x} = 4$; в) $2\sqrt{x} = 0$; д) $\sqrt{x} - 8 = 0$;

б) $\sqrt{x} = 0,5$; г) $4\sqrt{x} = 1$; е) $3\sqrt{x} - 2 = 0$.

а) x=…			**в) x=…**			**д) x=…**		
б) x=…			**г) x=…**			**е) x=…**		

Свойства арифметического квадратного корня

21. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$;

б) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; г) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; е) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

22. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{810 \cdot 40}$; в) $\sqrt{72 \cdot 32}$; д) $\sqrt{50 \cdot 18}$; ж) $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

б) $\sqrt{10 \cdot 250}$; г) $\sqrt{8 \cdot 98}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$; з) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

23. Представьте в виде квадрата выражения:

а) x^4 г) $\frac{1}{x^{10}}$

б) x^6 д) x^2y^8

в) x^{18} е) $\frac{x^6}{y^{12}}$

24. Вычислите:

а) $\sqrt{(0,1)^2}$; г) $\sqrt{(1,7)^2}$; ж) $2\sqrt{(-23)^2}$;

б) $\sqrt{(-0,4)^2}$; д) $\sqrt{(-19)^2}$; з) $5\sqrt{52^2}$;

в) $\sqrt{(-0,8)^2}$; е) $\sqrt{24^2}$; и) $0{,}2\sqrt{(-61)^2}$.

Применение свойств арифметического квадратного корня

25. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{80}$; д) $\sqrt{125}$; ж) $\sqrt{363}$;

б) $\sqrt{18}$; г) $\sqrt{48}$; е) $\sqrt{108}$; з) $\sqrt{845}$.

26. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{200}$; д) $0{,}2\sqrt{75}$; ж) $-0{,}125\sqrt{192}$;

б) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{160}$; е) $0{,}7\sqrt{300}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{450}$.

27. Сравните значения:

а) $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; в) $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$; д) $-\sqrt{14}$ и $-3\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{20}$ и $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$; е) $-7\sqrt{0{,}17}$ и $-11\sqrt{0{,}05}$.

28. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $3\sqrt{3},\ 2\sqrt{6},\ \sqrt{29},\ 4\sqrt{2},\ 2\sqrt{11}$;

б) $6\sqrt{2},\ \sqrt{58},\ 3\sqrt{7},\ 2\sqrt{14},\ 5\sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{11},\ -2\sqrt{5},\ \sqrt{2},\ -2\sqrt{6},\ -\sqrt{51}$;

г) $-\sqrt{83},\ -9\sqrt{2},\ -\sqrt{17},\ -5\sqrt{8},\ -\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение, его виды

Определение 1

Квадратное уравнение – это уравнение, записанное как $\underline{a \cdot x^2+b \cdot x+c}$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, при этом ***a*** - не равно нулю.

Зачастую квадратные уравнения также носят название уравнений второй степени, поскольку по сути квадратное уравнение есть алгебраическое уравнение второй степени.

Приведем пример для иллюстрации заданного определения:

1) $9 \cdot x^2+16 \cdot x+2=0$
2) $7{,}5x^2+3{,}1x+0{,}11=09x^2+16x+2=0$
3) $7{,}5x^2+3{,}1x+0{,}11=0$ и т.п. – это квадратные уравнения.

Определение 2

Числа a, b и c – это коэффициенты квадратного уравнения $a \cdot x^2+b \cdot x+c=0a \cdot x^2+b \cdot x+c=0$, при этом коэффициент

a - носит название первого, или старшего, или коэффициента при x2
b - второго коэффициента, или коэффициента при x,
c - называют свободным членом.

К примеру, в квадратном уравнении:

$$\mathbf{6 \cdot x^2-2 \cdot x-11=0}$$

старший коэффициент равен: *6,*

второй коэффициент есть: *−2,*

а свободный член равен: *−11*.

Обратим внимание на тот факт, что, когда коэффициенты *b* или *c* являются отрицательными, то используется краткая форма записи вида: $\mathbf{6 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 11 = 0}$,

а не: $6 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (-11) = 0$

Уточним также такой аспект:

Если коэффициенты a и/или b равны: «1» или «−1», то явного участия в записи квадратного уравнения они могут не принимать, что объясняется особенностями записи указанных числовых коэффициентов.

К примеру, в квадратном уравнении:

$$\mathbf{y^2 - y + 7 = 0}$$

старший коэффициент равен «1», а второй коэффициент есть «−1».

Дробные рациональные уравнения

Определение 1

Рациональное уравнение – это такое уравнение, в обеих частях которого содержатся рациональные выражения.

В различных пособиях можно встретить еще одну формулировку.

Определение 2

Рациональное уравнение – это такое уравнение, запись левой части которого содержит рациональное выражение, а правая – нуль.

Определения, которые мы привели для рациональных уравнений, являются равнозначными, так как говорят об одно и том же. Подтверждает правильность наших слов тот факт, что для любых рациональных
выражений PP и QQ уравнения P=QP=Q и P−Q=0P−Q=0 будут ра вносильными выражениями.

А теперь обратимся к примерам.

Пример 1

Рациональные уравнения

Целые рациональные уравнения	Дробно-рациональные уравнения
$\frac{2x+3}{5}=5x;$	$\frac{2x+3}{5+x}=4x;$
$x^2+6x+8=0;$	$\frac{x^2+6x+8}{x+2}=0;$
$\frac{x+5}{4}=\frac{x-9}{6}.$	$\frac{x+5}{4x}=\frac{x-9}{6}.$

Рациональные уравнения делятся на две большие группы: целые и дробные. Посмотрим, какие уравнения будут относиться к каждой из групп.

Определение 3

Рациональное уравнение будет являться *целым* в том случае, если в записи левой и правой его частей содержатся целые рациональные выражения.

Определение 4

Рациональное уравнение будет являться *дробным* в том случае, если одна или обе его части содержат дробь.

Дробно рациональные уравнения в обязательном порядке содержат ***деление на переменную*** или же переменная имеется в знаменателе. В записи целых уравнений такого деления нет.

Пример 2
Дробно рациональные уравнения

1) $\dfrac{2x-1}{x+7}=\dfrac{3x+4}{x-1}$ 3) $\dfrac{2x+3}{2x-1}=\dfrac{x-5}{x+3}$

2) $\dfrac{1+3x}{1-2x}=\dfrac{5-3x}{1+2x}$ 4) $\dfrac{1+5x}{x+1}=\dfrac{2+x}{x}$

К числу целых рациональных уравнений можно отнести линейные и квадратные уравнения.

Задачи для практики

Квадратное уравнение и его корни

29. Является ли уравнение квадратным:

а) $3,7x^2 - 5x + 1 = 0$; в) $2,1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$; д) $7x^2 - 13 = 0$;

б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$; г) $x + x^2 - 1 = 0$; е) $-x^2 = 0$?

30. Найдите корни уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0,1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

31. Решите уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0,1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

32. Решите уравнения:

а) $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$; в) $6a^2 - (a + 2)^2 = -4(a - 4)$;

б) $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 6$; г) $(5y + 2)(y - 3) = -13(2 + y)$.

Дробные рациональные уравнения

33. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y}{y+3}$

б) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4}$

в) $\frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x}$

г) $\frac{y^2-6y}{y-5} = \frac{5}{5-y}$

д) $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}$

34. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{7x}{x^2+1}$;

б) $\frac{y^2}{y^2-6y} = \frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$;

в) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$;

г) $\frac{8y-5}{y} = \frac{9y}{y+2}$;

д) $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 2$;

е) $\frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x}$;

ж) $x+2 = \frac{15}{4x+1}$;

з) $\frac{x^2-5}{x-1} = \frac{7x+10}{9}$.

35. Найдите значение y, при котором:

а) сумма дробей $\frac{3y+9}{3y-1}$ и $\frac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

б) разность дробей $\frac{5y+13}{5y+4}$ и $\frac{4-6y}{3y-1}$ равна 3;

в) сумма дробей $\frac{y+1}{y-5}$ и $\frac{10}{y+5}$ равна их произведению;

г) разность дробей $\frac{6}{y-4}$ и $\frac{y}{y+2}$ равна их произведению.

36. Решите уравнения:

а) $\frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y}$;

б) $\frac{10}{y^3-y} + \frac{1}{y-y^2} = \frac{14}{x-4}$;

в) $\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x+3}$;

г) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$

Неравенства

Числовые неравенства и их свойства

При введении понятия неравенства имеем, что их определение производится по виду записи. Имеются алгебраические выражения, которые имеют знаки $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.$\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Дадим определение.

Определение 1

Числовым неравенством называют неравенство, в записи которого обе стороны имеют числа и числовые выражения.

Числовые неравенства рассматриваем еще в школе после изучения натуральных чисел. Такие операции сравнения изучаются поэтапно. Первоначальные имею вид:

$1<5$

$5+7 > 3 < 5$

$5+7>3$

Свойства:

Чтобы правильно работать с неравенствами, необходимо использовать свойства числовых неравенств. Они идут из понятия неравенства. Такое понятие задается при помощи утверждения, которое обозначается как «больше» или «меньше».

Определение 2

- число a **больше** b, когда разность a-b – положительное число;
- число a **меньше** b, когда разность a-b – отрицательное число;
- число a **равно** b, когда разность a-b – равняется нулю.

Определение используется при решении неравенств с отношениями «меньше или равно», «больше или равно». Получаем, что:

Определение 3

- а *больше или равно* b, когда *a -b* является **неотрицательным** числом;
- а *меньше или равно* b, когда *a-b* является **неположительным** числом.

Определения будут использованы при доказательствах свойств числовых неравенств.

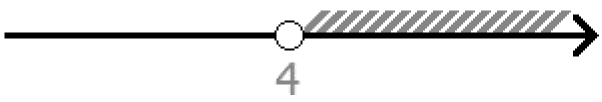
Примеры решения систем линейных неравенств с одной переменной

Несколько линейных неравенств, удовлетворяющих одним и тем же решениям, образуют систему.

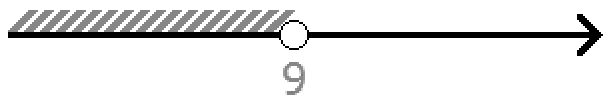
Рассмотрим простейший пример. Система $\begin{cases} x > 4 \\ x < 9 \end{cases}$ состоит из двух неравенств, которые уже решены.

Решениями первого неравенства являются все числа, которые больше 4. Решениями второго неравенства являются все числа, которые меньше 9.

Изобразим множество решений каждого неравенства на координатной прямой и запишем ответы к ним в виде числовых промежутков:



$x \in (4\,;+\infty)$



$x \in (-\infty\,;9)$

Но дело в том, что неравенства $x > 4$ и $x < 9$ соединены знаком системы, а значит зависимы друг от друга. Им не дозволяется раскидываться решениями как им захочется. Наша задача указать решения, которые одновременно будут удовлетворять и первому неравенству и второму.
Говоря по-простому, нужно указать числа, которые больше 4, но меньше 9. Очевидно, что речь идет о числах, находящихся в промежутке от 4 до 9.

Значит решениями системы $\begin{cases} x > 4 \\ x < 9 \end{cases}$ являются числа от 4 до 9. Границы 4 и 9 не включаются во множество решений системы, поскольку неравенства $x > 4$ и $x < 9$ строгие. Ответ можно записать в виде числового промежутка:

$$x \in (4; 9)$$

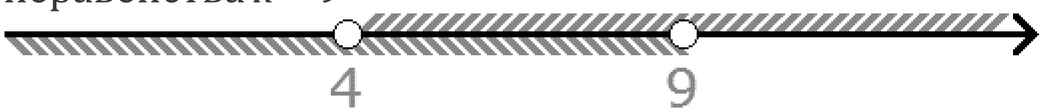
Также, нужно изобразить множество решений системы на координатной прямой.

Для системы линейных неравенств решение на координатной прямой изображают так:

Сначала указывают границы обоих неравенств:

На верхней области отмечают множество решений первого неравенства $x > 4$

На нижней области отмечают множество решений второго неравенства $x < 9$



Нас интересует область, которая отмечена штрихами с обеих сторон. В этой области и располагаются решения системы $\begin{cases} x > 4 \\ x < 9 \end{cases}$. Видно, что эта область располагается в промежутке от 4 до 9. Для наглядности выделим эту область красным цветом:

Для проверки можно взять любое число из этого промежутка и подставить его в исходную систему $\begin{cases} x > 4 \\ x < 9 \end{cases}$. Возьмем, например, число 6

$$\begin{cases} 6 > 4 \\ 6 < 9 \end{cases}$$

Видим, что решение 6 удовлетворяет обоим неравенствам. Возьмём ещё какое-нибудь число из промежутка (4; 9), например, число 8

$$\begin{cases} 8 > 4 \\ 8 < 9 \end{cases}$$

Видим, что решение «8» удовлетворяет обоим неравенствам.

Исходя из рассмотренного примера, можно сформировать правило для решения системы линейных неравенств:

Чтобы решить систему линейных неравенств, нужно по отдельности решить каждое неравенство, и указать в виде числового промежутка множество решений, удовлетворяющих каждому неравенству.

Задачи для практики

Числовые неравенства и их свойства

37. Сравните числа a и b, если:

а) $a - b = -0{,}001$; б) $a - b = 0$; в) $a - b = 4{,}3$.

38. Верно ли, что при любом x неравенство:

а) $4x(x + 0{,}25) > (2x + 3)(2x - 3)$;
б) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;
в) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;
г) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$?

39. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:

а) $a^2 - 6a + 14 > 0$; б) $b^2 + 70 > 16b$.

40. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x} = 2 - \frac{3}{x - 2}$; б) $\frac{3}{2x - 1} = 5x - 9$.

Неравенства с одной переменной и их системы

41. Найдите пересечение и объединение:

А) множеств цифр, используемых в записи чисел 11 243 и 6321;

Б) множеств букв, используемых в записи слов «геометрия» и «география».

42. Множеством каких фигур является пересечение:

А) множества прямоугольников и множества ромбов;

Б) множества равнобедренных треугольников и множества прямых треугольников.

43. Выполните:

Найдите пересечение и объединение множеств X и Y, если:
а) X — множество простых чисел, Y — множество составных чисел;
б) X — множество целых чисел, кратных 5, Y — множество целых чисел, кратных 15.

44. Выполните:

Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством N натуральных чисел, множеством Z целых чисел, множеством Q рациональных чисел. Найдите пересечение и объединение:

а) множества натуральных и множества целых чисел;

б) множества целых и множества рациональных чисел;

в) множества рациональных и множества иррациональных чисел.

Степень с целым показателем

Степень с целым показателем и ее свойства

Степень с целым показателем является такой степенью, показатель в которой записан в виде целого числа. Натуральные числа входят во множество целых чисел. Степень с натуральным показателем также является степенью с целым показателем. Существуют степени с нулевым показателем. Такой тип степени относят к степеням с целым показателем. Это объясняется тем, что ноль является целым числом.

Свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с целым показателем (при условии, что основание степени не равны нулю).

Свойство 1
Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n верно равенство

$$a^{m} \bullet a^{n} = a^{m+n}$$

Свойство 2
Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n верно равенство

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n}$$

Свойство 3
Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n верно равенство

$$(a^{m})^{n} = a^{mn}$$

Свойство 4
Для каждых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n верно равенство

$$(ab)^{n} = a^{n} \bullet b^{n}$$

Свойство 5
Для каждых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n верно равенство

$$(a/b)^{n} = a^{n}/b^{n}$$

Задачи для практики

Степень с целым показателем и ее свойства

1. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{10^2}$ б) $\frac{1}{6^7}$ в) $\frac{1}{x^7}$ г) $\frac{1}{y^{10}}$ д) $\frac{1}{7}$

2. Вычислите:

а) 4^{-2}
б) $(-3)^{-3}$
в) $(-1)^{-9}$
г) $(-1)^{-20}$
д) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$
е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

3. Сравните с нулём значение степени:

9^{-5}; 2.6^{-6}; $(-7.1)^{-6}$; $(-3.9)^{-3}$

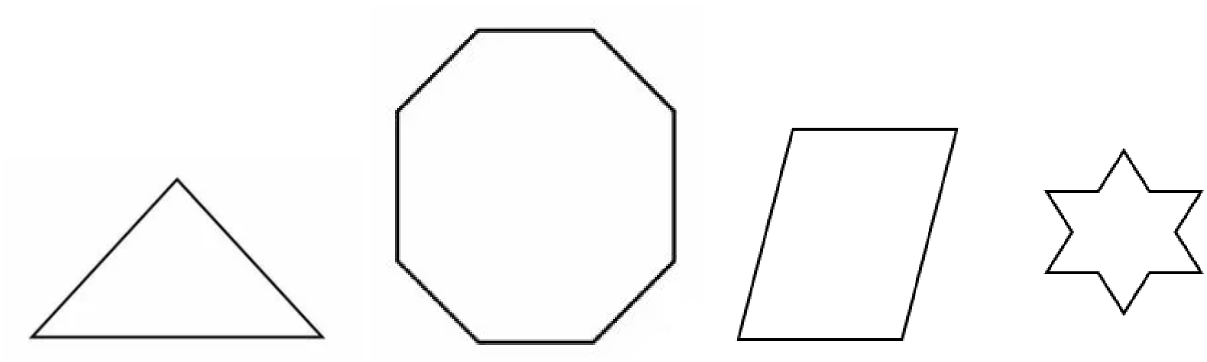
4. Найдите значения выражения:

а) $8 \cdot 4^{-3}$
б) $-2 \cdot 10^{-5}$
в) $18 \cdot (-9)^{-1}$
г) $10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$
д) $3^{-2} + 4^{-1}$
е) $2^{-3} - (-2)^{-4}$
ж) $0,5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
з) $0,3^0 + 0,1^{-4}$

Четырехугольники

Многоугольник

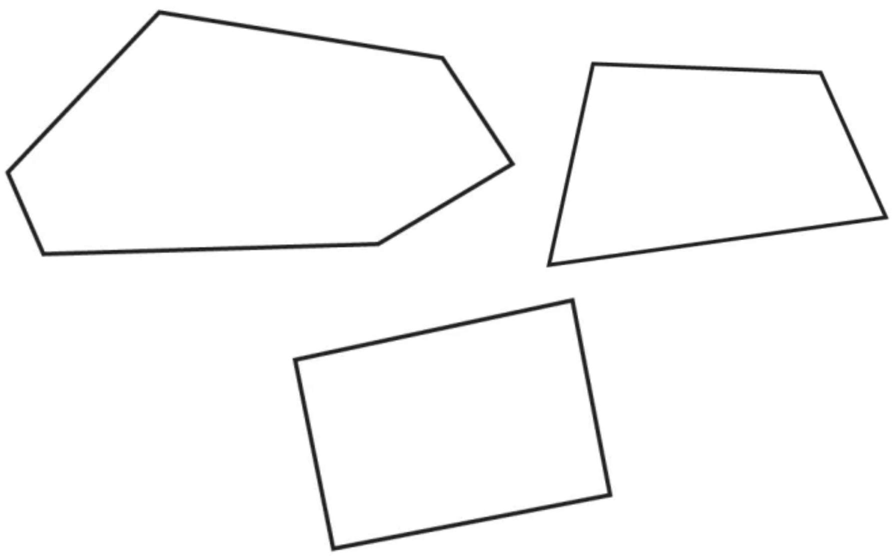
Фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек, называется многоугольником.



Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.
Сумма углов выпуклого **n**-угольника равна:

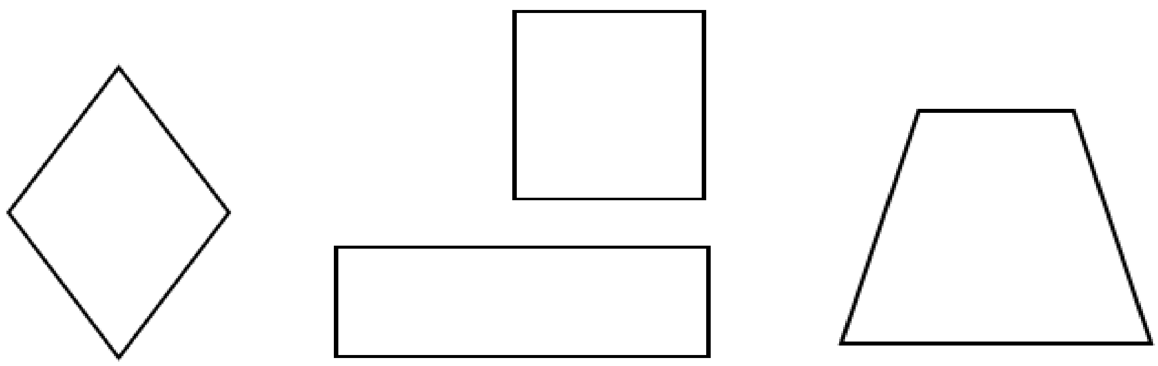
$$(n-2)*180$$



Четырехугольник

Каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали. Две несмежные стороны четырехугольника называются противоположными. Две вершины, не являющиеся соседними, также называются противоположными.
Четырехугольники бывают выпуклые и невыпуклые. Каждая диагональ выпуклого четырехугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырехугольника также разделяет его на два треугольника.

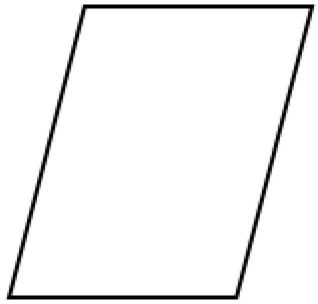
Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна ***(n-2)*180***, то сумма углов выпуклого четырехугольника равна **360**.



Параллелограмм (свойства, признаки)

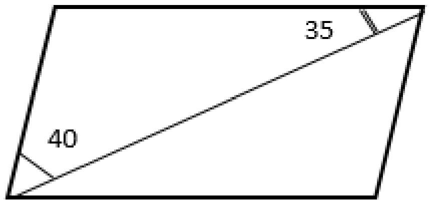
Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
Некоторые свойства параллелограмма:
1. В Параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
Признаки параллелограмма:

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

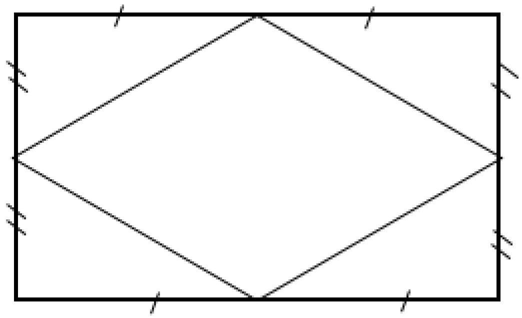


Задачи для практики

45. Периметр параллелограмма равен 48. Найдите стороны параллелограмма, если одна из сторон равна 10.
46. Найдите углы параллелограмма.



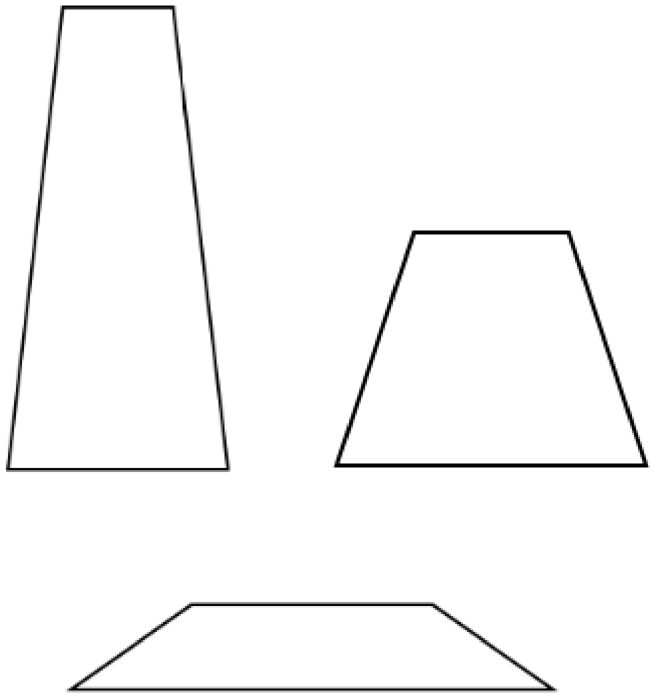
47. Доказать, что ABCD - ромб.



48. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на два отрезка, длиной в 7 см и 14 см.

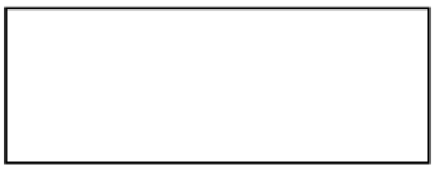
Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями, а две другие стороны боковыми.
Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны. Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной.



Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства

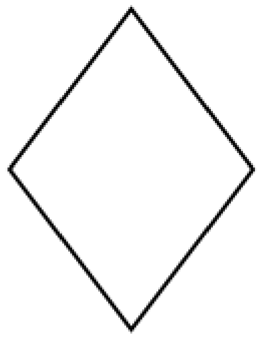
Прямоугольников называется параллелограмм, у которого все углы прямые.



Диагонали прямоугольника равны.

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник.

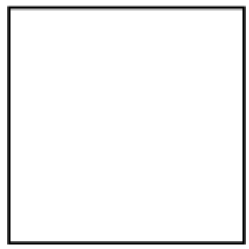
Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.



Свойства квадрата:

1. Все углы квадрата прямые.

2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.



Осевая симметрия

Две точки A и B - называются симметричными относительно прямой, если эта прямая проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему.
Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой а также принадлежит этой фигуре.
Прямая a называется осью симметрии фигуры.
Две точки A и B - называются симметричными относительно точки O, если O - середина отрезка AB.
Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется центром симметрии фигуры.

Задачи для практики

49. Найдите углы B и D трапеции ABCD с основаниями AD и BC, если <A=36, <C=117.
50. Один из углов равнобедренной трапеции равен 68. Найдите остальные углы трапеции.
51. Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.
52. Постройте равнобедренную трапецию ABCD по основанию AD, углу A и боковой стороне AB
53. Найдите периметр ромба ABCD, в котором <B=60, AC=10.5 см
54. Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.
55. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О, F.
56. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45.
57. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.
58. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырехугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

Площадь

Понятие площади многоугольника

Свойства площадей:

1. Равные многоугольники имеют равные площади.
2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Площадь: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции

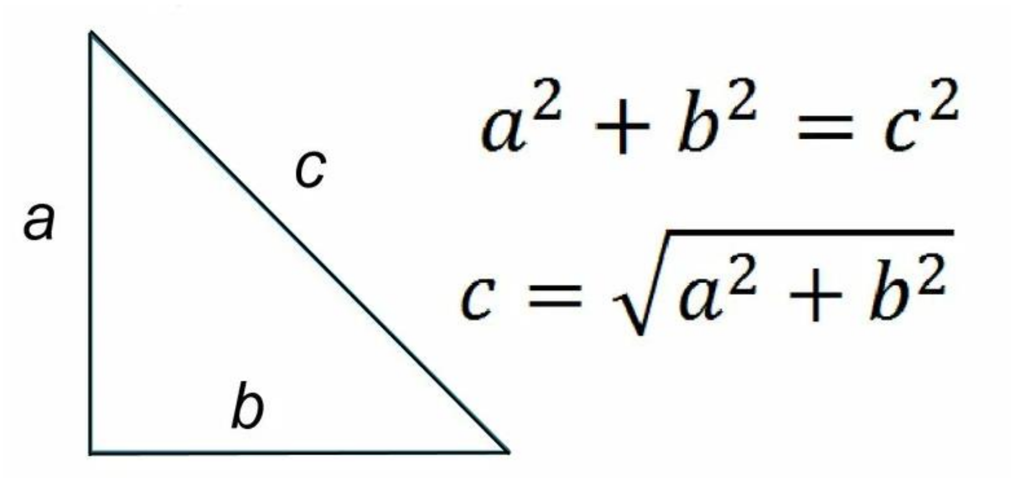
Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

$$(a+b)^2=S+S+a^2+b^2$$

Отсюда получаем: **$S=ab$**
Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.
Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.
Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Задачи для практики

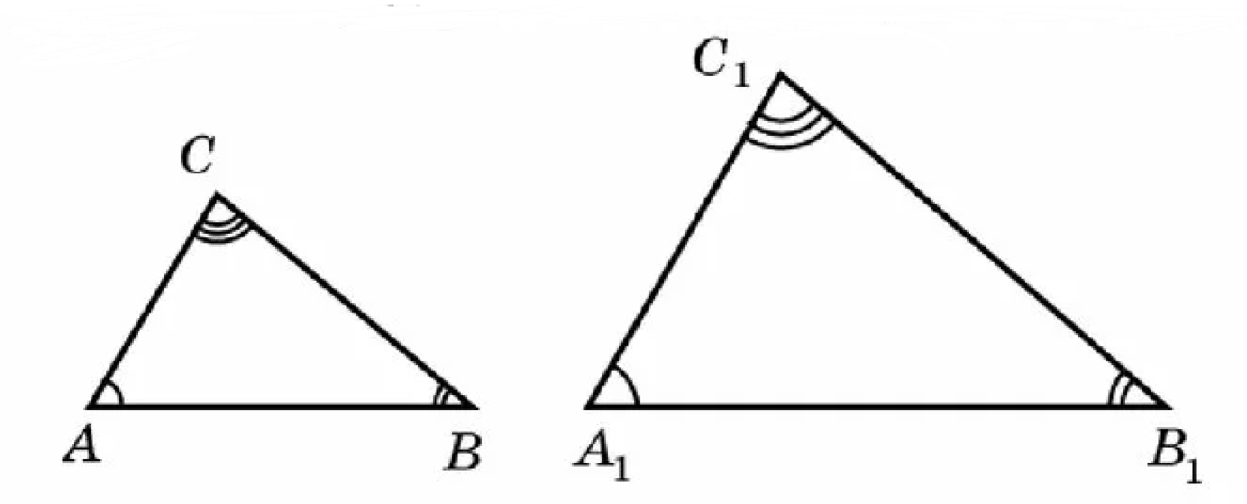
59. Как изменится площадь прямоугольника, если:
а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую — уменьшить в два раза?
60. Найдите стороны прямоугольника, если:
а) его площадь равна 250 см., а одна сторона в 2,5 раза больше другой;
б) его площадь равна 9 м., а периметр равен 12 м.
61. Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?
62. Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3м и 2,7 м?
63. Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.
64. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведенная к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.
65. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11см; б) 1,2 дм и 3 дм.
66. Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.
67. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.
68. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.
69. Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60°, если гипотенуза равна с.

70. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.
71. Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.
72. Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.
73. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.
74. Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.
75. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными: а) 24 см, 25 см, 9см; б) 15см, 17см, 8 см.

Подобные треугольники

Подобные треугольники

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



Признаки подобия треугольников

Если **два угла** одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Если **две стороны** одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и **углы, заключенные между этими сторонами,** равны, то такие треугольники подобны.

Если **три стороны** одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

По двум пропорциональным сторонам и углу между ними: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$.	По двум равным углам.	По трем пропорциональным сторонам: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

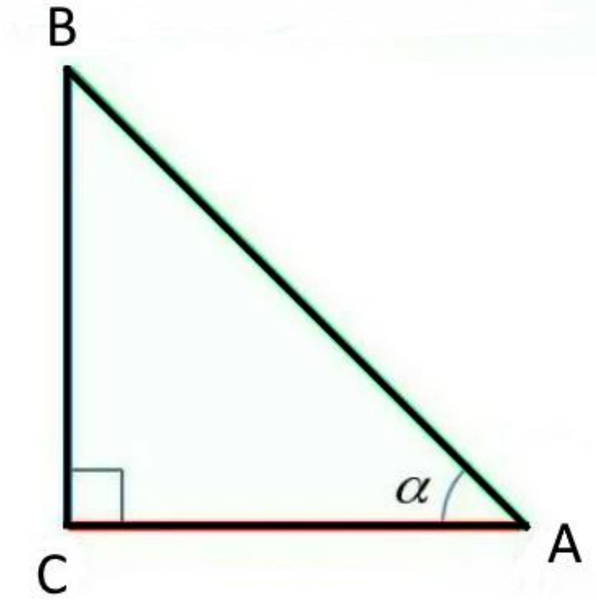
Применение подобия к доказательству теорем и решение задач

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Задача 1.
Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$tgA = \frac{BC}{AB}$$

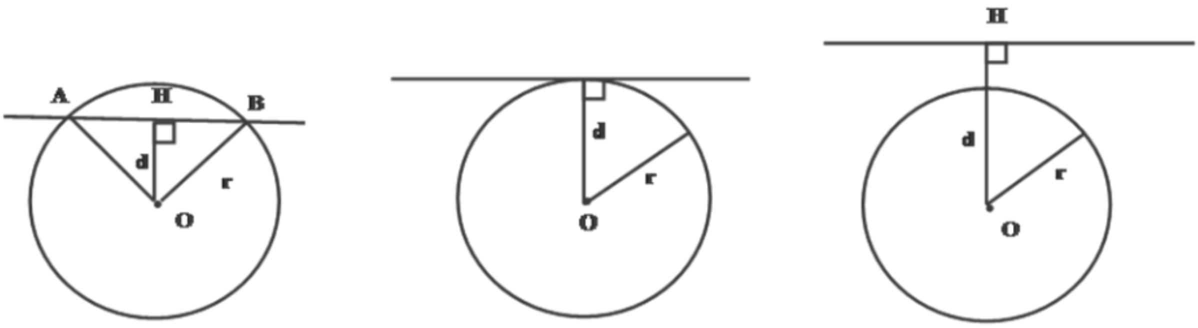
Задачи для практики

76. Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15см и 20см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?
77. План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображенного на плане треугольника равна 87,5 см. Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1:100 000.
78. Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
79. Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
80. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его большую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
81. Докажите, что четырехугольник — ромб, если его вершинами являются середины сторон:
    а) прямоугольника;
    б) равнобедренной трапеции.
82. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.
83. Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) BC=8, AB=11; б) BC=21, AC=20; в) BC=1, AC=2; г) AC=24, AB=25.
84. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна **c**, а один из острых углов равен **a**. Выразите второй острый угол и катеты через **c** и **a** и найдите их значения, если **c=24** см, а **a=35°**.

Окружность

Взаимное расположение прямой к окружности

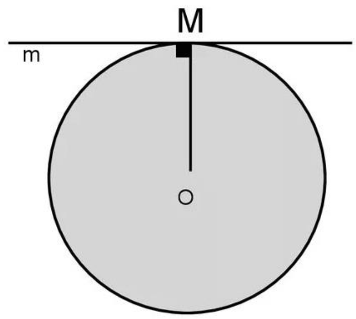
Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности.
Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не вмещают общих точек.
Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.



$d < r$	$d = r$	$d > r$
две общие точки	**одна общая точка**	**не имеют общих точек**

Касательная к окружности, ее свойство и признак

Прямая, имеющая с окружность только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



Свойство:

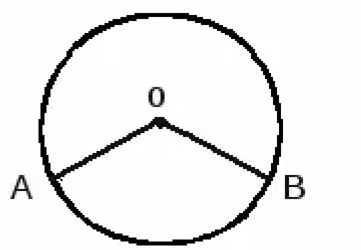
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Центральные и вписанные углы

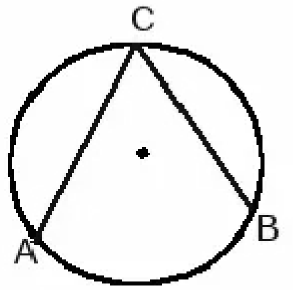
Угол с вершиной в центре окружности называется ее *центральным углом*.
Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой.
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



Угол АОВ – центральный. Он равен дуге, на которую он опирается.



Угол АСВ – вписанный. Он равен половине дуги, на которую он опирается.

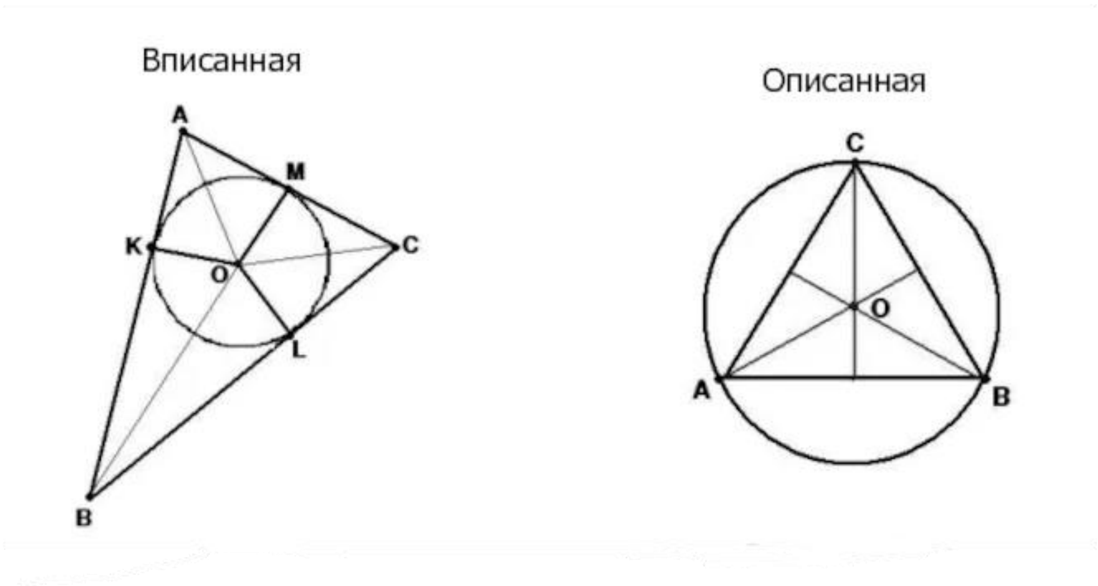
Четыре замечательные точки треугольника

Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Вписанная и описанная окружности

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник - описанным около этой окружности.
В любой треугольник можно вписать окружность.

Замечания:
1. В треугольник можно вписать только одну окружность.
2. Не во всякий четырехугольник можно вписать окружность.



В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник - вписанным в эту окружность.
Около любого треугольника можно описать окружность.

Замечания:
1. Около треугольника можно описать только одну окружность.
2. Около четырехугольника не всегда можно описать окружность.

В любом вписанном четырехугольника сумма противоположных углов равна 180.
Если сумма противоположных углов четырехугольника равно 180, то около него можно описать окружность.

Задачи для практики

85. Через точку А окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.
86. Через концы хорды АВ, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке С. Найдите угол АСВ.
87. Даны окружность с центром О радиуса 4,5 см и точка А. Через точку А проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если ОА = 9 см.
88. Найдите вписанный угол АВС, если дуга АС, на которую он опирается, равна: а) 48°; 6) 57°; в) 9°; г) 1245°; д) 180°.
89. Точки А и В разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а большая точкой М делится в отношении 6:5, считая от точки А. Найдите угол ВАМ.
90. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключенных между параллельными хордами, равны.
91. Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключенные между секущими, равны 140° и 52°.
92. Прямая АМ — касательная к окружности, АВ — хорда этой окружности. Докажите, что угол МАВ измеряется половиной дуги АВ, расположенной внутри угла МАВ.
93. Хорды АВ и CD пересекаются в точке Е. Найдите ED, если: а) AE=5, BE=2, CE=2,5; 6) AE=16, BE=9, CE=ED; в) AE=0,2, BE=0,5, CE=0,4.
94. Докажите, что если в треугольнике АВС стороны АВ и АС не равны, то медиана АМ треугольника не является высотой.
95. Биссектрисы углов при основании АВ равнобедренного треугольника АВС пересекаются в точке М. Докажите, что прямая СМ перпендикулярна к прямой АВ.
96. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
97. Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см. Точка касания

окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника